1997 ТОМ VII(XV)

УДК 519.21

АЛИЕВ С.А.

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим ветвящиеся процессы с иммиграцией. Предпологается, что законы размножения частиц и процесса иммграции зависят от состояния внешней среды в момент размножения и иммиграции, а среда периодически меняется со временем. Если периодом в таких процессах считать, например, времена года, смены дня и ночи, то в качестве примера можно привести математическую модель многих биологических процессов связанных с ростом и делением клеток.

Пусть каждая существующая в момент t частица за время $[t, t+\Delta t]$ с вероятностью $\delta_{1k} + p_k(t)\Delta t + 0(\Delta t)$, $p_k(t) \geq 0, k \neq 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 0$ превращается в k новых частиц, где $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$. Кроме того, за это же время с вероятностью $\delta_{0i} + q_i(t)\Delta(t) + 0(\Delta t)$, $q_i(t) \geq 0$, $i > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i(t) = 0$ иммигрирует i частиц. Положим

$$f(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)s^k, \quad a(t) = \left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=1}$$

$$b(t) = \left.\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}\right|_{s=1}, \quad g(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t)s^k$$

$$\alpha(t) = \left.\frac{\partial \ g(t,s)}{\partial s}\right|_{s=1}, \beta(t) = \left.\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right|_{s=1}$$

Предположим, что $p_k(t)$ и $q_k(t), k \geq 0$, являются периодическими функциями с периодом $T > 0$. Тогда функции $f(t,s)$ и $g(t,s)$ также будут периодическими с периодом T.

Через $\mu(u,t)$ обозначим число частиц в момент t процесса без иммиграции, если в момент u была одна частица, и через $Z(u,t)$- число частиц процесса с иммграцией при условии, что в момент u не было частиц.

Рассмотрим процесс без иммиграции. Пологая

$$\Phi(t,\tau,s) = Ms^{\mu(t,s)}, \quad t \leq \tau, \quad |s| < 1$$

выпишем обратное и прямое уравнения процесса $\mu(t,\tau)$:

$$\frac{\partial\Phi(t,\tau,s)}{\partial t} = -f(t,\Phi(t,\tau,s)),\ \Phi(t,t,s) = s \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi(t,\tau,s)}{\partial \tau} = f(\tau,s)\frac{\partial\Phi(t,\tau,s)}{\partial s},\ \Phi(t,t,s) = s \qquad (2)$$

Обозначим

$$A(x) = \int_0^x a(u)e^{-\rho(0,u)}du,\ \rho(u,t) = \int_u^t a(x)dx$$

$$B(x) = \int_0^x b(u)e^{-\rho(0,u)}du,\ \varepsilon(t) = e^{\rho(0,\tau_t)},$$

где $0 \le \tau_t < T$.

Теорема. *Пусть* $a(x)$ *и* $b(x)$ *интегрируемы по Риману в* $[0,T]$, $P_0(t) = \lim_{\tau\to\infty} P\{\mu(t,\tau) = 0\}$. *Тогда переходя к пределу при* $\tau \to \infty$, *имеем*

$$0 \le P_0(t) \le \frac{2e^{\rho(0,t)}}{B(T)\left(1 - e^{-\rho(0,T)}\right)^{-1} - B(T)},$$

откуда следуют оценки (3).

Литература

[1]. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* М., Наука, 1971, с. 436.

Əliyev S.A. **PERİODİK MÜHİTDƏ ŞAXƏLƏNƏN PROSESLƏR**

Hissəciklərin çoxalma qanununun ətraf mühitdən asılı olan şaxələnən prosesin cırlaşma ehtimalı üçün asimptotik formullar alınmışdır.

Aliyev S.A. **BRANCHING PROCESSES IN A PERIODIC MEDIUM**

Estimations for the probability of branching process in which the multiplication laws depend on the state of exterior medium are obtained.