УДК 512.57

БАБАЕВ А.А., БАЙРАМОВ Р.А., ШАРИФОВ Т.К.

О СТАБИЛИЗАТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ БАЗИСАХ КЛОНОВ ФИНИТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ОТНОШЕНИЙ

Напомним, что независимым (более точно– термально независимым) в алгебре $\mathbb{D} := \langle D;F \rangle$ подмножеством называется всякое $S \subseteq D$, в котором ни один элемент $d \in S$ термально невыразим через остальные, т.е. не принадлежит порождённой множеством $S \setminus \{d\}$ подалгебре $[S \setminus \{d\}]_{\mathbb{D}}$; здесь $[\ldots]_{\mathbb{D}}$ – оператор замыкания относительно семейства F сигнатурных операций алгебры $\mathbb{D}$. В частности, базисы алгебры $\mathbb{D}$ - это её порождающие (в другой терминологии, полные) подмножества, обладающие свойством независимости; здесь независимость можно заменить на минимальность относительно включения $\subseteq$.

Как распознать непринадлежность элемента d алгебры $\mathbb{D}$ её подалгебре $\mathbb{C} < \mathbb{D}$? В случае, когда $\mathbb{D}$ – некоторый клон финитарных функций, весьма важным для ответа на поставленный вопрос оказывается то обстоятельство, что он является стабилизатором (т.е. классом сохранения) некоторого семейства отношений; иначе говоря, всякий клон финитарных функций обладает хотя бы одним стабилизаторным представлением (в действительности, даже бесконечным семейством таких представлений).

Стабилизаторные представления фиксированного клона различаются значениями параметров. Поэтому целесообразно выявить соотношения как между различными параметрами фиксированного представления, так и между соответственными параметрами разных представлений клона.

1^0. Введём необходимые обозначения и определения, напомним используемые в заметке известные факты.

Совокупность всех обладающих свойством Ф элементов x записываем либо в виде $\{x : \Phi(x)\}$, либо в виде $\{x | \Phi(x)\}$ – выбирая в каждом конкретном случае ту из записей, которая "удобнее смотрится". Символы $:=, \Lambda, V, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ изображают равенство по определению, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и равносильность, соответственно; ORD– класс всех порядковых чисел, CARD– класс всех мощностей, ω_0 – наименьшее бесконечное $\alpha \in$ ORD (вместо ω_0 часто пишут просто ω). Для обозначения произвольных порядковых чисел (соотв., мощностей) используем буквы α, $\beta, \gamma, \delta, \lambda, \eta$ (соотв., буквы μ, ν, π, θ), а неудобную по техническим причинам букву "алеф" заменяем символом □. Подразумевается традиционная система теории множеств, включающая аксиому *выбора, что* позволяет исчерпать бесконечные мощности алефами $\aleph_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{ORD}$ (в частности, $\aleph_0$ – счётная мощность). Для порядкового числа α и мощности μ полагаем $\mathrm{ORD}_\alpha := \{\beta \in \mathrm{ORD} \mid \beta < \alpha\}$ и $\mathrm{ORD}[\mu] := \mathrm{ORD}_{0[\mu]}$, где $o(\mu)$- началь-ное $\alpha \in \mathrm{ORD}$ мощности μ. Напомним также (см.[10]), что $\omega_\alpha = 0(\aleph_\alpha)$ и для ненулевого предельного $\beta \in \mathrm{ORD}$ $cf(\beta) := \min\{\gamma \in \mathrm{ORD} \mid \beta$ конфинально $\omega_\gamma\}$.

Алгебры обозначаем заглавными латинскими буквами "жирного шрифта", а их носители- обычными, причём носитель алгебры $\mathbf{D}$ – соответствующей буквой D. Запись $\mathbf{D} \le \mathbf{E}$ означает, что $\mathbf{D}$ является подалгеброй в $\mathbf{E}$ (для собственных подалгебр используется знак $<$); говорят также, что множество D образует подалгебру в $\mathbf{E}$ и пишут $D \le \mathbf{E}$ (для собственных, соотв., $D < \mathbf{E}$).

Для отображения φ с областью определения I и непустого $J \subset I$ $\varphi \mid J$ означает сужение φ на J; естественно определяется сужение на J семейства отображений.

Пусть $P_A^{(n)}$– семейство всех n-арных функций на непустом множестве A и $P_A := \bigcup\{P_A^{(n)} \mid 1 \le n < \omega\}$– множество всех финитарных функций на A. Для адекватного описания процесса образования всевозможных суперпозиций финитарных функций А.И. Мальцев [11] снабдил P_A бинарной операцией $*$ и унарными операцями ζ, τ, Δ и ∇, следующим образом определив их для любых $f \in P_A^{(n)}$, $g \in P_A^{(m)}$:

$$(f * g)(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) := f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots x_{m+n-1});$$
$$(\nabla f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := f(x_2, \ldots, x_{n+1});$$
$$\left.\begin{aligned} (\zeta f)(x_1, \ldots, x_n) &:= f(x_2, \ldots, x_n, x_1) \\ (\tau f)(x_1, \ldots, x_n) &:= f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) \\ (\Delta f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) &:= f(x_1, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}\right\} n \ge 2;$$

при $n = 1$ $\zeta f := f, \tau f := f, \Delta f := f$.

Алгебру $\mathbf{P}_A := \langle P_A; *, \zeta, \tau, \Delta, \nabla\rangle$ он назвал итеративной алгеброй Поста над множеством A, а алгебру $\mathbf{P}_A^* := \langle P_A; *, \zeta, \tau, \Delta\rangle$ предитеративной алгеброй Поста над A. Удобно рассматривать также селекторизованную предитеративную алгебру Поста $\widetilde{\mathbf{P}}_A^* := \langle P_A; *, \zeta, \tau, \Delta, \varepsilon_2^2\rangle$, где ε_2^2- нульарная операция, выделяющая в P_A селекторную функцию $e_2^2 : A^2 \to A$, $e_2^2(x_1, x_2) \equiv x_2$; так как остальные селекторные функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i$ (где $1 \le i \le n < \omega$) выражаются через e_2^2 с помощью операций из $\{*, \zeta, \tau, \Delta\}$ (см.[12]), то любая подалгебра $\mathbf{M} \le \widetilde{\mathbf{P}}_A^*$ содержит множество $Sel_A := \{e_i^n \mid 1 \le i \le n < \omega\}$ всех селекторных функций на A. Далее, так как $\nabla f = f * e_2^2$, то селекторизованную итеративную алгебру Поста $\widetilde{\mathbf{P}}_A := \langle P_A; *, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \varepsilon_2^2\rangle$ можно уже не рассматривать: алгебры $\widetilde{\mathbf{P}}_A$ и $\widetilde{\mathbf{P}}_A$ имеют одни и те же подалгебры, порождающие множества, конгруенции, автоморфизмы, эндоморфизмы и т.п., ибо они термально эквивалентны (т.е. множества их термальных операций совпадают). Подалгебры алгебр $\widetilde{\mathbf{P}}_A$, где A пробегает класс непустых множеств, называют (см., например, [9], [20], [25]) клонами финитарных функций (или– для краткости– просто клонами). Многие авторы называют клонами и сами носители подалгебр $\mathbf{M} \leq \widetilde{\mathbf{P}}_A^*$, т.е. содержащие Sel_A суперпозиционно замкнутые подмножества $M \subseteq P_A$; мы также будем огда придерживаться этого соглашения. Далее, $\mathbf{F}_A := \widetilde{\mathbf{P}}_A^*$ и $[\varnothing]_{\mathbf{F}_A} = Sel_A$; поэтому Sel_A - нуль решётки $\mathbf{S}(\mathbf{F}_A)$ всех подклонов клона $\mathbf{F}_A$.

Подмножество $\rho \subseteq A^I$ с непустым индексным множеством I называется I-отношением на A (см. [23]), а множество $St(\rho)$ всех сохраняющих ρ функций $f \in P_A$ – стабилизатором [3] (классом сохранения [14], множеством полиморфизмов [23]) I-отношения ρ. При этом "$f \in P_A^{(n)}$ сохраняет $\rho \subseteq A^I$" означает, что при любых $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \rho$ выполняется $f \circ (\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n) \circ \delta_{I,n} \in \rho$, где $\delta_{I,n} : i \mapsto \langle i, \ldots, i \rangle$ – диагональная инъекция I в I^n и знак $\times$ изображает операцию декартова произведения отображений, в частности, $(\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n)(\langle i, \ldots, i \rangle) = \langle \varphi_1(i), \ldots, \varphi_n(i) \rangle$. Если J равномощно I и, следовательно, существует биекция $G : I \to J$, то для J- отношения $G(\rho) \subseteq A^J$, заданного посредством

$$G(\rho) := \{\varphi^G \in A^J \mid \varphi \in \rho\}, \quad (\forall i \in J)\varphi^G(j) := \varphi(G^{-1}(j)),$$

при любых n и любых $f \in P_A^{(n)}$, $\varphi_l \in \rho$ $(l = 1, \ldots, n)$ верна равносильность

$$f \circ (\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n) \circ \delta_{I,n} \in \rho \Leftrightarrow f \circ (\varphi_1^G \times \ldots \times \varphi_n^G) \circ \delta_{J,n} \in G(\rho),$$

откуда $St(\rho) = St(G(\rho))$. Поэтому для любой ненулевой мощности ν верно равенство

$$\{St(\rho) : \rho \subseteq A^I \wedge |I| = \nu\} = \{St(\rho) \mid \rho \subseteq A^\nu := A^{\mathrm{ORD}\,[\nu]}\};$$

иначе говоря, при рассмотрении стабилизаторов I-отношений можно всегда считать, что индексное множество I является начальным отрезком в ORD. Мощность ν объявляется арностью (обозначение: $ar(\rho)$) ORD $[\nu]$-отношения ρ; при этом ρ называется финитарным отношением, если $ar(\rho) < \aleph_0$, и называется инфинитарным отношением, если $ar(\rho) \geq \aleph_0$; выражение "отношение ρ на A" означает, что ρ является либо финитарным, либо инфинитарным отношением на A. Класс (не являющийся множеством) всевозможных отношений на A обозначим через Rel_A, положив для фиксированной мощности $\nu \neq 0$

$$\mathrm{Rel}_A^{(\nu)} := \{\rho \in \mathrm{Rel}_A \mid ar(\rho) = \nu\},$$

$$\mathrm{Rel}_A^{(\nu)} := \{\rho \in \mathrm{Rel}_A \mid ar(\rho) < \nu\};$$

эти $\mathrm{Rel}_A^{(\nu)}$, $\mathrm{Rel}_A^{\langle\nu\rangle}$ уже являются множествами, в частности, $\mathrm{Rel}_A^{\langle\square_0\rangle}$ - множество всех финитарных отношений на A. Всякое множество R отношений на A содержится в $\mathrm{Rel}_A^{\langle\nu\rangle}$ при подходящей ν.

Стабилизатор $St(R)$ множества $R \subseteq \mathrm{Rel}_A^{\langle\nu\rangle}$ определим равенством $St(R) := \bigcap\{St(\rho) | \rho \in R\}$. Очевидно, $St(R)$ (в частности, при $R = \{\rho\}$ и $St(\rho)$) является клоном, а именно, подклоном в $\mathbb{F}_A$. Скажем, что клон $\mathbb{C}$ обладает (μ, ν)- реляционным стабилизаторным представлением, если он представим в виде $C = St(R)$, где $|R| = \mu$ и $\nu(R) :=$ $:= \min\{\nu' \in \mathrm{CARD} | (\forall \rho \in R) ar(\rho) < \nu'\} = \nu$. Ясно, что конечность R влечёт равенство $\nu(R) = (\max\{ar(\rho) : \rho \in R\})^+$, где для произвольной мощности θ θ^+ означает непосредственно следующую за θ мощность. Так как $St(R) =$ $= St(\Pi\{\rho : \rho \in R\})$ и $ar(\Pi\{\rho : \rho \in R\}) = \sum_{\rho \in R} ar(\rho)$, то всякий клон, обладающий (μ, ν)-реляционным стабилизаторным представлением, обладает также $(1, \theta^+)$- реляционным стабилизаторным представлением, где $\theta := \sum_{\rho \in R} ar(\rho) \le \mu \cdot \nu$ (здесь R – семейство отношений, фигурирующее в исходном представлении) и $\theta^+ \ge \nu(R)$; в частности, при $2 \le |R| < \square_0 \wedge R \subset$ $\subset \mathrm{Rel}_A^{\langle\square_0\rangle}$ имеем $\theta^+ > \nu(R)$. Ясно также, что во всяком (μ, ν)- реляционном стабилизаторном представлении клона $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_A$ выполняется $\mu \le \left|\mathrm{Rel}_A^{\langle\nu\rangle}\right| =$ $= \sum_{1 \le \theta < \nu} 2^{|A|^\theta}$. Выбор стабилизаторного представления для клона диктуется конкретными целями– в одних случаях желательна малость $\nu = \nu(R)$ и несущественно, как велико $\mu = |R|$, в других– наоборот.

2^0. Всякий ли клон функций обладает каким-либо стабилизаторным представлением? Ответ положителен– см. [6], [19], [20]. Более того, всякий клон $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_A$ обладает каноническим ($\square_0, \max\{\square_0, |A|^+\}$)-реляционным стабилизаторным представлением $C = St(\{gr_n(C) : 1 \le n < \omega\})$, где $gr_n(C) \subseteq$ $\subseteq A^{A^n}$ - ординатная часть n-го графика [6] клона $\mathbb{C}$; следовательно, он обладает и каноническим (1, $\max\{\square_1, |A|^+\}$)- реляционным стабилизаторным представлением $C = St(GR(C))$, где $GR(C) := \prod_{1 \le n < \omega} gr_n(C)$. В частности: при $|A| < \square_0$ первое из этих представлений является ($\square_0, \square_0$)- реляционным, а второе (1, $\square_1$)- реляционным; при $|A| \ge \square_0$ первое является ($\square_0, |A|^+$)- реляционным, второе будет $(1, |A|^+)$- реляционным. Поэтому (μ, ν)- реляционные представления с условием $\nu > \max\{\square_1, |A|^+\}$ не представляют интереса и далее не рассматриваются; среди представлений с условием $\nu \leq$ $\leq \max\{\square_1, |A|^+\}$ часто более удобны отличные от вышеуказанных канонических.

Теорема 1. *При предельном* $\alpha \in$ ORD *для любого* $(\mu, \square_\alpha)$-*реляционного стабилизаторного представления выполняется неравенство* $\mu \geq \square_{cf(\omega_\alpha)}$.

Доказательство. Допустим противное: при предельном α существует $(\mu, \square_\alpha)$- реляционное стабилизаторное представление $C = St(R)$, для которого $\mu < \square_{cf(\omega_\alpha)}$; по определению $|R| = \mu$, $\nu(R) = \square_\alpha$. Если $\mu < \square_0$ (и, следовательно, $\mu < \square_0 \leq \square_{cf(\omega_\alpha)}$), то в силу конечности R получаем $\nu(R) =$ $= (\max\{ar(\rho) : \rho \in R\})^+$, т.е. приходим к существованию $\theta \in$ CARD со свойством $\square_\alpha = \theta^+$ – противоречие с предельностью α.

Пусть теперь $\square_0 \leq \mu = \square_\alpha < \square_{cf(\omega_\alpha)}$ (и, следовательно, $\gamma < cf(\omega_\alpha)$). В силу определения $\nu(R)$ выполняется

$$\{o(ar(\rho)) : \rho \in R\} \subseteq \mathrm{ORD}_{\omega_\alpha},$$

а ввиду предельности α и равенства $|R| = \square_\alpha$ при некотором δ $(0 \leq \delta \leq \gamma)$ имеем $\square_0 \leq |\{o(ar(\rho)) : \rho \in R\}| = \square_\delta \leq \square_\gamma$. Поэтому состоящее из начальных $\beta \in$ ORD (неупорядоченное) множество $\{o(ar(\rho)) : \rho \in R\}$ можно превратить в строго возрастающую трансфинитную ω_δ-последовательность $\langle \lambda_\eta : \eta < \omega_\delta \rangle$, целиком содержащуюся в $\mathrm{ORD}_{\omega_\alpha}$. В силу определения $cf(\omega_\alpha)$ и неравенств $\delta \leq \gamma < cf(\omega_\alpha)$ ω_α не конфинально ω_δ, откуда $\lambda^* := \lim\limits_{\eta < \omega_\delta} \lambda_\eta <$ $< \omega_\alpha$. С другой стороны, ввиду перечисления последовательностью $\langle \lambda_\eta : \eta < \omega_\delta \rangle$ всех элементов множества $\{o(ar(\rho)) : \rho \in R\}$ выполняется $\lambda^* =$ $= o(\nu(R)) = 0(\square_\alpha) = \omega_\alpha$. Получили противоречие: $\lambda^* < \omega_\alpha \Lambda \lambda^* = \omega_\alpha$, что завершает доказательство.

Следствие (из анализа доказательства). *В условиях теоремы верно более сильное неравенство* $\overline{\mu} \geq \square_{cf(\omega_\alpha)}$, *где для* (μ, ν)-*реляционного представления* $C = St(R)$ *через* $\overline{\mu}$ *обозначена мощность* $|R/{\sim}|$, *а эквивалентность* $\sim$ *задана на* R *посредством* $\rho \sim \rho' \overset{def}{\Leftrightarrow} af(\rho) = af(\rho')$.

Действительно, в вышеприведённом доказательстве мы в обоих случаях- и при $\mu < \square_0 \leq \square_{cf(\omega_\alpha)}$, и при $\square_0 \leq \mu < \square_{cf(\omega_\alpha)}$- фактически сначала переходили к неравенствам $\overline{\mu} < \square_0$ и, соответственно, $\square_0 \leq \overline{\mu} < \square_{cf(\omega_\alpha)}$ (здесь бесконечность $\overline{\mu}$ обеспечивалась предельностью α и минимальностью $\nu(R) = \square_\alpha$), а затем уже приводили каждый из вариантов к противоречию.

Итак, при предельном α для всякого $(\mu, \square_{\alpha})$-реляционного представления выполняется $\mu \geq \overline{\mu} \geq \square_{cf(\omega_\alpha)}$.

Теорема 2. *Если стабилизаторное представление* $C = St(R)$ *является либо* $(\mu, \square_{\alpha})$*-реляционным для некоторого предельного* α *с условием* $\mu \leq \square_{\alpha}$, *либо* $(\mu, \square_{\alpha-1})$*-реляционным для некоторого (не обязательно предельного)* α *с условием* $\mu \leq \square_{\alpha}$, *то клон* $\mathbf{C}$ *обладает также* $(1, \square_{\alpha+1})$*- реляционным представлением* $C = St(\Pi\{\rho : \rho \in R\})$.

Доказательство. Достаточно установить, что в обоих случаях мощность $\theta := ar(\Pi\{\rho : \rho \in R\}) = \sum\limits_{\rho \in R} ar(\rho)$ совпадает с $\square_{\alpha}$. Так как в обоих случаях каждое слагаемое суммы θ не превосходит $\square_{\alpha}$ (в первом случае- строго меньше) и количество слагаемых $\mu = |R|$ также не превосходит $\square_{\alpha}$, то $\theta \leq \square_{\alpha} \cdot \square_{\alpha} = \square_{\alpha}$. Обратное неравенство $\theta \geq \square_{\alpha}$ во втором случае следует из того, что в силу равенства $\nu(R) = \square_{\alpha+1}$ среди слагаемых сумма θ есть равное $\square_{\alpha}$. В первом случае оно следует из установленного выше для предельного α соотношения $\overline{\mu} \geq \square_{cf(\omega_\alpha)}$ (гарантирующего, что суммы θ содержит не менее $\square_{cf(\omega_\alpha)}$ различных слагаемых), определения конфинальности порядковых чисел и равенства

$$\sum_{\gamma<\beta} \square_{\lambda_\gamma} = \square_{\lim\limits_{\gamma<\beta} \lambda_\gamma},$$

верного для любого предельного $\beta \neq 0$ и любой строго возрастающей β-последовательности $\langle \lambda_\gamma : \gamma < \beta \rangle$, составленной из порядковых чисел (см. Теорему 12 на стр. 287 в [10]). Итак, $\theta = \square_{\alpha}$, что и требовалось.

Замечание 1. При $\mu > \square_{\alpha}$ представление $C = St(\Pi\{\rho : \rho \in R\})$ будет уже $(1, \square_{\alpha+\gamma})$ - реляционным, где $\gamma \geq 2$.

Замечание 2. Всякое (μ, ν^{+})- реляционное представление $C = St(R)$ клона $\mathbf{C} \leq \mathbf{F}_A$ можно погрузить в арность ν, т.е. в наибольшую из встречающихся в R арностей, заменив каждое $\rho \in R$ арности $ar(\rho) < \nu$ на то единственное отношение $\tilde{\rho}$ на A арности ν, которое удовлетворяет условиям $\rho = \tilde{\rho} \,|\, \mathrm{ORD}[ar(\rho)]$, $(\forall \gamma \in \mathrm{ORD}[\nu] \setminus \mathrm{ORD}[ar(\rho)]) (\forall \varphi \in \tilde{\rho}) \quad \varphi(\gamma) := \,:= \varphi(0)$; так как $St(\tilde{\rho}) = St(\rho)$, то в результате такого погружения для клона $\mathbf{C}$ получится снова (μ, ν^{+})- реляционное представление, но уже с условием $\overline{\mu} = 1$. Однако $(\mu, \square_{\alpha})$- реляционное представление с предельным α нельзя (в силу следствия из теоремы 1) погрузить в фиксированную арность, сохранив при этом второй параметр представления.

3^0. Ниже рассматриваются лишь конечно-значные клоны, т.е. $\mathbf{C} \leq \mathbf{F}_A$ при $2 \leq k = |A| < \square_0$; без ограничения общности $A := \{0, \ldots k-1\}$, а вместо

$P_A, Sel_A, \mathbb{F}_A$ и $[\cdots]_{\mathbb{F}_A}$ здесь используем обозначения $P_k, Sel_k, \mathbb{F}_k$ и $[\cdots]_k$, соответственно, причём $[\cdots] := [\cdots]_2$. Клон $\mathbb{C}$ называется [4, 20] конечно-определяемым (finitely presentable), если он обладает стабилизаторным представлением $C = St(R)$, где $|R|$, $\nu(R) < \square_0$. Семейство всех конечно-определяемых $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k$ обозначим $S_{f.p.}(\mathbb{F}_k)$. Нам потребуется также семейство всех 1- порождённых $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k$; его обозначим $S_{1.g.}(\mathbb{F}_k)$.

Пусть $S^{\min}(\mathbb{F}_k)$ и $S^{\max}(\mathbb{F}_k)$– семейства всех минимальных (т.е. атомных) и, соответственно, максимальных (т.е. коатомных) подклонов в $\mathbb{F}_k$, а для фиксированного $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k$ $Min(\mathbb{C}) := \{\mathbb{D} \in S^{\min}(\mathbb{F}_k) | \mathbb{D} \le \mathbb{C}\}$, $Max(\mathbb{C}) :=$ $:= \{\mathbb{D} \in S^{\max}(\mathbb{F}_k) | \mathbb{C} \le \mathbb{D}\}$. Как хорошо известно [11, 14, 15, 25], для любого k $(2 \le k < \square_0)$ $S^{\min}(\mathbb{F}_k)$, $S^{\max}(\mathbb{F}_k)$ являются непустыми конечными семействами и для любого $\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k$ верны равносильности

$$Min(\mathbb{C}) = \varnothing \Leftrightarrow C = Sel_k \Leftrightarrow Max(\mathbb{C}) = S^{\max}(\mathbb{F}_k) \ ,$$
$$Min(\mathbb{C}) = S^{\min}(\mathbb{F}_k) \Leftrightarrow C = P_k \Leftrightarrow Max(\mathbb{C}) = \varnothing .$$

В частности, при $k = 2$ имеем $|S^{\max}(\mathbb{F}_2)| = 5$ и $|S^{\min}(\mathbb{F}_2)| = 7$, причём $S^{\max}(\mathbb{F}_2) = \{T_0, T_1, M, L, S\}$ и $S^{\min}(\mathbb{F}_2) = \{[c_0], [c_1], [\bar{x}], [x \wedge y], [x \vee y], [x + y +$ $+ z (\mathrm{mod}\, 2)], [h(x, y, z)]\}$. Здесь: M (соотв., L и S)– клон всех монотонных (соотв., линейных по модулю 2 и самодвойственных) булевых функций; для $a \in \{0,1\}$ $T_a := St(\{a\})$ и $c_a(x) \equiv a$; $\bar{x} := x + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, $h(x, y, z) := (x \wedge y) \vee$ $\vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x (\mathrm{mod}\, 2)$.

Для $W \subseteq S^{\min}(\mathbb{F}_k)$ и $H \subseteq S^{\max}(\mathbb{F}_k)$ положим

$$RE_{\min}(W) := \{\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k | Min(\mathbb{C}) = W\} \ ,$$
$$RE_{\max}(H) := \{\mathbb{C} \le \mathbb{F}_k | Max(\mathbb{C}) = H\} \ .$$

Очевидно, $RE_{\min}(\varnothing) = \{Sel_k\} = RE_{\max}(S^{\max}(\mathbb{F}_k))$,

$$RE_{\min}(S^{\min}(\mathbb{F}_k)) = \{P_k\} = RE_{\max}(\varnothing).$$

Семейства $W \subseteq S^{\min}(\mathbb{F}_k)$ и $H \subseteq S^{\max}(\mathbb{F}_k)$ назовём нижним и, соответственно, верхним клоновым k-типом, если $RE_{\min}(W) \ne \varnothing$ и, соответственно, $RE_{\max}(H) \ne \varnothing$; при этом всякий клон $\mathbb{C} \in RE_{\min}(W)$ назовём реализацией для W и всякий клон $\mathbb{C} \in RE_{\max}(H)$- реализацией для H.

Рутинными рассуждениями доказывается

Предложение 1. *Для любого нижнего клонового k-типа W выполняется $\left[\bigcup\{F : \mathbb{F} \in W\}\right]_k = \bigcap\{C : \mathbb{C} \in RE_{\min}(W)\}$ и этот клон является наименьшим в частично упорядоченном включением семействе $RE_{\min}(W)$.Двойственным образом, для любого верхнего клонового k - типа H выполняется $\bigcap\{F : \mathbb{F} \in H\} = \left[\bigcup\{C : \mathbb{C} \in RE_{\max}(H)\}\right]_k$ и этот клон* *является наибольшим в частично упорядоченном включением семействе* $RE_{\max}(H)$.

Нижний клоновый k - тип W назовём нижним функциональным k - типом, если $RE^{1.g.}_{\min}(W) := RE_{\min}(W) \cap S_{1.g.}(\mathbb{F}_k) \neq \varnothing$, а всякий клон $\mathbb{C} \in RE^{1.g.}_{\min}(W)$ назовём в этом случае функциональной реализацией для W; двойственном образом, т.е. условием $RE^{1.g.}_{\max}(H) := RE_{\max}(H) \cap S_{1.g.}(\mathbb{F}_k) \neq \varnothing$, определяется свойство верхнего клонового k-типа H быть верхним функциональным k-типом и функциональная реализация для H. В отличие от ситуации предложения 1, среди клонов $\mathbb{C} \in RE^{1.g.}_{\min}(W)$ может не быть наименьшего, а среди $\mathbb{C} \in RE^{1.g.}_{\max}(H)$- наибольшего.

Состоящее из нижних функциональных k-типов семейство $\{W_1, \dots, W_t\}$ назовём нижним базисным k-типом, если существует базис $B = \{g_1, \dots, g_t\}$ клона $\mathbb{F}_k$ такой, что для всех $i \in \{1, \dots, t\}$ $W_i = Min([\{g_i\}]_k)$; иначе говоря, если для всех $i \in \{1, \dots, t\}$ $[\{g_i\}]_k \in RE^{1.g.}_{\min}(W_i)$; при этом базис $B = \{g_1, \dots, g_t\}$ назовём реализацией для $\{W_1, \dots, W_t\}$. Двойственным образом определяются верхние базисные k - типы и их реализации.

Замечание 3. Введённые в [8] понятия "тип булевой функции" и "тип базиса алгебры логики" совпадают с введёнными выше понятиями верхнего функционального 2-типа и верхнего базисного 2-типа, соответственно. В [8] доказано, что существует всего 15 верхних функциональных 2-типов и ровно 42 верхних базисных 2-типа (все они явно выписаны в [8]). Так как $|S^{\min}(\mathbb{F}_2)| = 7 > 5 = |S^{\max}(\mathbb{F}_2)|$ и $18 = |S^{\max}(\mathbb{F}_3)| << |S^{\min}(\mathbb{F}_3)|$ (см. [14, 18]), то естественно ожидать, что при любом $k \geq 2$ нижние функциональные и базисные k-типы тоньше классифицируют функции и, соответственно, базисы клона $\mathbb{F}_k$, чем верхние. При $k \geq 2$ это будет показано ниже.

Корректность понятий нижнего и верхнего базисного k-типов (в смысле инвариантности относительно выбора представителей) обеспечивается следующим легко проверяемым утверждением.

Предложение 2. *Для любого нижнего базисного* k*-типа* $\{W_1, \dots, W_t\}$ *семейство* $\{g_1, \dots, g_t\}$ *является реализацией* $\{W_1, \dots, W_t\}$ *при любых* $\mathbb{C}_1 \in RE^{1.g.}_{\min}(W_1), \dots, \mathbb{C}_t \in RE^{1.g.}_{\min}(W_t)$ *и любых функциях* $g_i \in C_i$ *с условием* $[\{g_i\}]_k = C_i$ $(1 \leq i \leq t)$. *Двойственное утверждение верно для верхних базисных* k*-типов (при* $k = 2$ *частный случай этого двойственного утверждения в неявном виде содержится в работе* [8]*).*

Скажем, что нижний функциональный k-тип W удовлетворяет:

(а) условию $\forall_{f.p.}$, если $RE^{1.g.}_{\min}(W) \subseteq S_{f.p.}(\mathbb{F}_k)$;

(б) условию $\exists_{f.p.}$, если $RE^{1.g.}_{\min}(W) \cap S_{f.p.}(\mathbb{F}_k) \neq \varnothing$;

(в) условию $\forall_{\overline{f.p.}}$, если $RE^{1.g.}_{\min}(W) \cap S_{f.p.}(\mathbb{F}_k) = \varnothing$;

(г) условию $\exists_{\overline{f.p.}}$, если $RE^{1.g.}_{\min}(W) \not\subset S_{f.p.}(\mathbb{F}_k)$.

Заменяя в (а)-(г) $RE^{1.g}_{\min}(W)$ на $RE^{1.g}_{\max}(H)$, получаем условия $\forall_{f.p.}$, $\exists_{f.p.}$, $\forall_{f.p.}$, $\exists_{\overline{f.p.}}$ для верхнего функционального k-типа H. Очевидно, каждая из пар $(\forall_{f.p.}, \exists_{\overline{f.p.}})$ и $(\exists_{f.p.}, \forall_{\overline{f.p.}})$ состоит из взаимоисключающих условий (т.е. достаточно изучить $\forall_{f.p.}$ и $\exists_{f.p.}$).

Естественным образом для нижнего базисного k-типа $\{W_1,\dots,W_t\}$ и верхнего базисного k-типа $\{H_1,\dots,H_q\}$ вводятся условия $\forall\forall_{f.p.}$, $\forall\exists_{f.p.}$, $\forall\forall_{\overline{f.p.}}$, $\forall\exists_{\overline{f.p.}}$, $\exists\forall_{f.p}$, $\exists\exists_{f.p.}$, $\exists\forall_{\overline{f.p.}}$, $\exists\exists_{\overline{f.p.}}$; здесь записанный слева квантор связывает $i \in \{1,\dots,t\}$ и, соответственно, $j \in \{1,\dots,q\}$. Например, выполнение условия $\forall\forall_{f.p.}$ для нижнего базисного k-типа $\{W_1,\dots,W_t\}$ означает, что для всех $i \in \{1,\dots,t\}$ $RE^{1.g}_{\min}(W_i) \subseteq S_{f.p.}(\mathbb{F}_k)$. Ясно, что среди этих восьми $\forall\forall_{f.p.}$, ..., $\exists\exists_{\overline{f.p.}}$ образуется 4 пары взаимоисключающих условий и достаточно изучить $\forall\forall_{f.p.}$, $\forall\exists_{f.p}$, $\forall\forall_{\overline{f.p.}}$, $\forall\exists_{\overline{f.p.}}$.

Теорема 3. *При $k = 2$ число нижних функциональных 2-типов равно 19 и число нижних базисных 2-типов равно 80. В частности, помимо 0-членного $\varnothing$, 7-членного $S^{\min}(\mathbb{F}_2)$ и семи 1-членных $\{[c_0]\}$, $\{[c_1]\}$, $\{[\bar{x}]\}$, $\{[x \wedge y]\}$, $\{[x \vee y]\}$, $\{[x + y + z(\mathrm{mod}\,2)]\}$, $\{[h(x,y,z)]\}$ нижними функциональными 2-типами являются лишь следующие:*

Шесть 2-членных- $\{[c_0],[x \wedge y]\}$, $\{[c_0],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)]\}$, $\{[c_1],[x \vee y]\}$, $\{[c_1],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)]\}$, $\{[\bar{x}],[h(x,y,z)]\}$, $\{[h(x,y,z)],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)]\}$;

один 3-членный- $\{[\bar{x}],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)],[h(x,y,z)]\}$;

один 4-членный- $\{[x \wedge y],[x \vee y],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)],[h(x,y,z)]\}$;

два 5-членных- $\{[c_0],[x \wedge y],[x \vee y],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)],[h(x,y,z)]\}$, $\{[c_1],[x \wedge y],[x \vee y],[x+y+z(\mathrm{mod}\,2)],[h(x,y,z)]\}$.

Замечание 4. Все 80 нижних базисных 2-типов найдены нами также в явном виде, однако они не выписываются здесь из-за ограниченности объёма заметки (это будет сделано в содержащей подробные доказательства статье, подготовленной для депонирования).

Чему равно число верхних (нижних) функциональных или базисных 2-типов, удовлетворяющих тому или иному из перечисленных условий? Для каждой пары взаимоисключающих условий достаточно ответить на этот вопрос лишь для одного из двух таких условий. Поэтому в первой таблице теоремы 4 две строки вместо четырёх, а во второй- четыре вместо восьми.

Теорема 4. *Искомые числа описываются следующими таблицами:*

условие	*Число верхних функциональных 2-типов, удовлетворяющих условию*	*Число нижних функциональных 2-типов, удовлетворяющих условию*
$\forall_{f.p.}$	*11*	*15*
$\exists_{f.p.}$	*15*	*17*

условие	*Число верхних базисных 2-типов, удовлетворяющих условию*	*Число нижних базисных 2-типов, удовлетворяющих условию*
$\forall\forall_{f.p.}$	*21*	*60*
$\forall\exists_{f.p.}$	*42*	*67*
$\forall\forall_{\overline{f.p.}}$	*0*	*1*
$\forall\exists_{f.p.}$	*1*	*1*

Замечание 5. Сами 2-типы, удовлетворяющие соответствующим условиям, будут полностью указаны в статье, упомянутой в замечании 4. Здесь отметим лишь следующее: $\{[c_0],[x \wedge y]\}$ и $\{[c_1],[x \vee y]\}$ являются единственными нижними функциональными 2-типами, не удовлетворяющими условию $\exists_{f.p.}$ (т.е. удовлетворяющими $\forall_{\overline{f.p.}}$).

Итак, мы убедились, что нижние функциональные и базисные 2-типы классифицируют тоньше, чем верхние.

Помимо базисов клона $\mathbb{F}_k$, реализующих базисные k-типы с перечисленными выше условиями, и его простых [1], полупростых [2] и почленно минимальных [5] базисов, представляют интерес и другие разновидности специальных базисов клонов функций и клонов отношений. В частности, представляют интерес TR-сильные базисы подклонов $\mathbb{C} \leq \mathbb{F}_k$, введённые в [17] с использованием свойства триангулируемости пар функций по образцу сильных эквациональных базисов [7] многообразий алгебр (хотя сильные эквациональные базисы вводились в [7] лишь для многообразий групп, их универсально-алгебраическое обобщение не вызывает затруднений); TR-сильные базисы клонов финитарных отношений [19, 20] определяются совершенно аналогично с использованием понятия триангулируемости пар отношений. Напомним, что в [19, 20] клонами финитарных отношений на A названы подмножества $D \subseteq \mathrm{Rel}_A^{(\square_0)}$, замкнутые относительно семейства Ω специфических операций, имитирующего семейство $\{*, \tau, \zeta, \Delta, \varepsilon_2^2\}$ клоновых операций над функциями; при $A = \{0,\dots k-1\}$ вместо $\mathrm{Rel}_A^{(\square_0)}$ пишем $\mathrm{Rel}_k^{(\square_0)}$ и полагаем $\mathbb{R}_k := \langle \mathrm{Rel}_k^{(\square_0)}; \Omega \rangle$ (клон всех финитарных отношений на $\{0,\dots,k-1\}$).

В связи с существенным параллелизмом между процедурой порождения в клонах функций, процедурой порождения в клонах отношений и процедурой вывода тождеств в эквациональных теориях естественно ожидать, что TR- сильные базисы функциональных и реляционных клонов и сильные эквациональные базисы многообразий алгебр должны обладать "параллельными" поведениями. Однако эта естественная гипотеза опровергается сравнением нижеприводимой теоремы 5 с построенным в [7] групповым многообразием, обладающим бесконечным сильным эквациональным базисом, и с указанными в [17] конечными TR-сильными базисами для некоторых клонов $\mathbb{C} < \mathbb{F}_k$ $(k > 2)$.

Теорема 5. *При любом $k \geq 2$ в $\mathbb{F}_k$ нет подклонов, обладающих бесконечными TR- сильными базисами,а в $\mathbb{R}_k$ нет подклонов, обладающих TR- сильными базисами (даже конечными).*

Доказательство основано на результатах из [17, 24].

Теоремы 1, 2 принадлежат первому из соавторов, теоремы 3 и 4- третьему, теорема 5- второму.

Литература

[1]. Алексеев В.Б. *О простых базисах k-значной логики.* // Матем. заметки. –1969. –5, №4. –с.471-482.

[2]. Алексеев В.Б. *О полупростых базисах k-значной логики.* // Матем. заметки. –1980. –28,№3. –с.407-422.

[3]. Байрамов Р.А. *Стабилизаторы предикатов и функции Шеффера в конечнозначной логике* // Докл. АН Азерб.ССР. –1968. –24, №2. –с.3-6.

[4]. Байрамов Р.А., Ромов Б.А. *Фундаментальные и обобщённо фундаментальные подалгебры алгебр Поста* // Изв. АН Азерб. ССР. –1977, №1. –с. 7-12.

[5]. Байрамов Р.А., Насибов Э.С. *Об объединениях минимальных клонов* // Тезисы докл. III Междунар.конф.по алгебре (Красноярск, 1993). –с.32.

[6]. Боднарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А. *Теория Галуа алгебр Поста* // Кибернетика. –1969. -№3. –с.1-10; №5. –с.1-9.

[7]. Клейман Ю.Г. *О порождаемости многообразий групп своими подклассами* // Сиб.Матем.Журнал. –1982. –23,№6. –с. 117-132.

[8]. Крнич Л. *Типы базисов алгебры логики* // Glaznik Mat.-Fiz.-Astr. (Zagreb). –1965. –20, №1-2. –с.23-31.

[9]. Крохин А.А. *Моноидальные интервалы в решётках клонов* // Алгебра и Логика. –1995. –34, №3. –с. 288-310.

[10]. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* М.: Мир, 1970, 416с.

[11]. Мальцев И.А. *Интеративные алгебры и многообразия Поста* // Алгебра и Логика. –1966. –5, №2. –с.5-24.

[12]. Мальцев И.А. *Итеративные алгебры Поста.* –Новосибирск: НГУ, 1976, 100с.

[13]. Мальцев И.А. *Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебр Поста и их основных клеток* // Алгебра и Логика. –1972. –11, №6. –с. 571-587.

[14]. Яблонский С.В. *Функциональные построения в k - значной логике* // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. –1958. –51. –с.5-142.
[15]. ЯблонскийС.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. *Функции алгебры логики и классы Поста.* –М.:Наука, 1966, 119с.
[16]. Янов Ю.И., Мучник А.А. *О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса* // ДАН СССР. –1959. –127, №1. –с. 44-46.
[17]. Bairamov R.A. *On independent sets of functions in finite-valued logics* // Proc. XII Indernat.Symp. on MVL (Paris, 1982). –p.114-116.
[18]. Csakany B. *All minimal clones on the three-element set* // Acta Cybernetica. –1983. –6. –p. 227-238.
[19]. Pöschel R., Kaluznin L.A. *Funktionen-und Relationenalgebren.* –Berliln: VEB DVW, 1979, 259p.
[20]. Pöschel R. *A general Galois theory for operations and relations* // Report R-01/80 ZIMM AdWdDDR. –Berlin, 1980.
[21]. Pöschel R. *Collapsing clones* // Acta Sci.Math. (Szeged). –1993. –58. –p. 99-113.
[22]. Rosenberg I. *Über die funktionale Vollstandigkeit in den mehrwertigen Logiken* // Rozpravy CS AV (Praha). –1970. –80, №4. –p.3-93.
[23]. Rosenberg I. *Completeness properties of multiple- valued logic algebras* // in: Computer Sci.and MVL (ed.D.Rine). –North Holland, 1977, p.144-186.
[24]. Salomaa A. *On the heights of closed sets of operations in finite algebras* // Ann.Acad.Sci.Fennicae. –1965. –363. –12p.
[25]. Szendrei A. *Clones in universal algebra.* –Montre`al, 1986, 180p.
[26]. Taylor W. *The clone of a topological space.* –Berlin, 1986, 91p.

Babayev Ə.Ə., Bayramov R.A., Şərifov T.K.

FİNİTAR FUNKSİONAL VƏ RELYASİONAL KLONLARININ STABİLİZATOR TƏSVİRLƏRİ VƏ XÜSUSİ NÖV BAZİSLƏRİ HAQQINDA

Teorem 1, 2 stabilizator təsvirlərinin parametləri arasındakı əlaqələri araşdırır. Teorem 3 aşağı funksional və bazis 2-tiplərin sayını göstərir. Teorem 4-də aşağı və yuxarı 2-tirlər müqayisə edilir. Teorem 5-də funksional və relyasional klonlarının TR-güclü bazisləri öyrənilir.

Babaev A.A., Bairamov R.A., Sharifov T.K.

ON STABILIZER REPRESENTATIONS AND SPECIAL BASES OF FUNCTIONAL AND RELATIONAL CLONES

Theorems 1, 2 describe connections between parameters of stabilizer representations of the functional clones. Theorem 3 gives the numbers of lower functional and basical 2-types and full description of lower functional 2-types, also. Theorem 4 compares lower 2-types with upper ones. Theorem 5 focuses on TR-strong bases of some functional and relational clones.