УДК 517. 518. 3

ГАСАНОВ С.Г., СЕЙФУЛЛАЕВ Р.К.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

В данной работе в случае замкнутой гладкой кривой исследуются локальные свойства логарифмического потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, тесно связанного с интегралом типа Коши и сингулярными интегралами с ядром Коши.

Вопросы, связанные с локальными свойствами сингулярных интегралов (сопряженной функции) были поставлены в работе Г. Фройда [1], А.А. Гончаром (см.[2]) и относятся к получению локальных аналогов известной в теории сингулярных интегралов теоремы Племеля- Привалова. Частичные результаты в этом направлении были получены в работе M.Sallay [2], а в связи с задачами теории приближений- в работе Дж. И. Мамедханова [3]. В дальнейшем подробный анализ локальных свойств особых интегралов был проведен в работе Дж. И. Мамедханова, В.В. Салаева [4]. На основе анализа был введен локальный модуль непрерывности (см. Определение ниже), в терминах которого были получены оценки для особого интеграла и показана неулучшаемость в целом полученных оценок. Отметим также работы П.М. Таиразова [5] и его учеников, в которых использовался несколько иной локальный модуль непрерывности, работы М.И. Дьяченко [6], [7]. В дальнейшем эта тематика развивалась в работах Р.К. Сейфуллаева [8], А. Мусаева [9], Р.М. Рзаева [10] и др.

С другой стороны, в работах Р.А. Махмудзаде [11], [12] была развита техника исследования логарифмического потенциала двойного слоя, использующая элементы техники исследования сингулярных интегралов. Были получены оценки в терминах глобального модуля непрерывности, на основе которых изучено действие оператора логарифмического потенциала двойного слоя в обобщенных Гельдеровых пространствах.

В данной работе упомянутые выше направления объединяются в исследование локальных свойств логарифмического потенциала двойного слоя.

Приведем необходимые обозначения, определения и результаты.

Пусть γ - замкнутая гладкая кривая. $t = t(s)$- ее уравнение в дуговых координатах, где $s \in [0,l]$ и l- длина кривой. Через n_ξ обозначается единичная внутренняя нормаль в точке $\xi \in \gamma$.

Рассмотрим следующий логарифмический потенциал двойного слоя [13].

$$\tilde{\rho}(t)=\int_{\gamma}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}\ln\frac{1}{|\xi-t|}|d\xi|,\quad t\in\gamma,\tag{1}$$

где $\rho(\xi)$ - непрерывная функция на γ, т.е. $\rho(\xi)\in C_{\gamma}$, $\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}$ - дифференцирование по n_{ξ}.

Отметим, что такие интегралы для уравнения Лапласа используются также при приведении задач Дирихле и Неймана к интегральному уравнению Фредгольма.

Для непрерывной на γ функции $\rho(t)$ модулем непрерывности называется функция $\omega_{\rho}(\delta)$, определенная следующим образом:

$$\omega_{\rho}(\delta)=\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le\delta\\ t_1,t_2\in\gamma}}|\rho(t_1)-\rho(t_2)|$$

Известно, что модуль непрерывности обладает следующими свойствами:

1) $\omega_{\rho}(\delta)\ge 0$;
2) $\omega_{\rho}(\delta)\to 0$, при $\delta\to 0$;
3) $\omega_{\rho}(\delta)$ - неубывающая (т.е. при $\delta_1\le\delta_2\Rightarrow\omega_{\rho}(\delta_1)\le\omega_{\rho}(\delta_2)$);
4) $\frac{\omega_{\rho}(\delta)}{\delta}$ - почти убывающая (т.е. $\exists c>0$, что при $\delta_1\le\delta_2\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{\omega_{\rho}(\delta_1)}{\delta_1}\ge c\frac{\omega_{\rho}(\delta_2)}{\delta_2}$).

Кроме этого рассмотрим характеристику, учитывающую гладкость кривой γ:

$$\omega_{t'}(\delta)=\sup_{|t(s_1)-t(s_2)|\le\delta}|t'(s_1)-t'(s_2)|,$$

где $t'(s)$ - производная функция $t(s)$.

Известно, что $\omega_{t'}(\delta)$ обладает свойствами 1)- 4) модуля непрерывности ([11], [12]).

В работе Р.А. Махмудзаде [11] для логарифмического потенциала двойного слоя (1) доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* γ *- замкнутая гладкая кривая,* $\rho\in C_{\gamma}$, $d=diam\gamma=\sup_{t,\tau\in\gamma}|t-\tau|$ *и* $\int_0^d\frac{\omega_{t'}(\tau)\omega_{\rho}(\tau)}{\tau}d\tau<\infty$. *Тогда интеграл (1) существует и верно следующее неравенство:*

$$\omega_{\tilde{\rho}}(\delta)\le C\left(\int_0^{\delta}\frac{\omega_{t'}(\tau)\omega_{\rho}(\tau)}{\tau}d\tau+\delta\int_{\delta}^{d}\frac{\omega_{t'}(\tau)\omega_{\rho}(\tau)}{\tau^2}d\tau\right).$$

Рассмотрим теперь модуль непрерывности введенный в [4]:

$$\omega_{\rho}^{t_0}(\delta,\eta)=\sup_{\substack{|t_1-t_2|\le\delta\\ t_1,t_2\in O_\eta(t_0)}}|\rho(t_1)-\rho(t_2)|,\quad t_0\in\gamma,$$

где $O_\eta(_0)=\{\xi\in\gamma,|\xi-t_0|\le\eta\}$, $\eta\in(0,d]$, $d=diam\gamma$.

Легко доказать, что $\omega_{\rho}^{t_0}(\delta,\eta)$ обладает свойствами 1) – 4) модуля непрерывности по δ и свойствами 2), 3) по η.

В данной работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть γ - замкнутая гладкая кривая, $\rho\in C_\gamma$, $t_0\in\gamma$ и*

$$\int_0^d\frac{\omega_t(\tau)\omega_{\rho}^{t_0}(\tau,\eta)}{\tau}d\tau<+\infty,\ d=diam\gamma \tag{2}$$

Тогда интеграл (1) существует и справедлива следующая оценка:

$$\omega_{\rho}^{t_0}(\delta,\eta)\le C\left(\int_0^\delta\frac{\omega_t(\tau)\omega_{\rho}^{t_0}(\tau,2\eta+\delta)}{\tau}d\tau+\delta\int_\delta^\eta\frac{\omega_t(\tau)\omega_{\rho}^{t_0}(\tau,2\eta+\delta)}{\tau^2}d\tau+\right.$$

$$\left.+\delta\int_\eta^{2d}\frac{\omega_t\,\omega_{\rho}^{t_0}(\tau,2\tau+\delta)}{\tau^2}d\tau\right),$$

где $2\eta+\delta\le d$.

Доказательство. Согласно теореме Р.А. Махмудзаде интеграл *(1)* при соблюдении условия *(2)* сходится во всех точках кривой γ. Зафиксируем $t_0\in\gamma$. Пусть $t_1,t_2\in O_\eta(t_0)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|t_1-t_2|\le|t_2-t_0|$. Теперь предположим, что $|t_1-t_2|\le\frac{|t_2-t_0|}{2}$.

Случай $|t_1-t_2|\ge\frac{|t_2-t_0|}{2}$ рассматривается аналогично.

Введем обозначение $\gamma_\varepsilon(t)=\{\xi\in\gamma;|\xi-t|\le\varepsilon\}$ Учитывая, что

$$\int_\gamma\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t|}|d\xi|=\pi,\quad\forall t\in\gamma$$

рассмотрим следующую разность:

$$\tilde\rho(t_1)-\tilde\rho(t_2)=\int_\gamma\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-\int_\gamma\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|=$$

$$\pi(\rho(t_1)-\rho(t_2))+\int_\gamma[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-$$

$$-\int_\gamma[\rho(\xi)-\rho(t_2)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|.$$

Для краткости введем следующие обозначения:

$$\gamma_1(t_1)=\gamma_{2|t_1-t_2|}(t_1),\quad\gamma_2(t_0)=\gamma_{|t_2-t_0|+|t_1-t_2|}(t_0).$$

При этих обозначениях, получим

$$\widetilde{\rho}(t_1)-\widetilde{\rho}(t_2)=\pi(\rho(t_1)-\rho(t_2))+\int\limits_{\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2(t_0)\setminus\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|+\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_2(t_0)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-$$

$$-\int\limits_{\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_2)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|-\int\limits_{\gamma_2(t_0)\setminus\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_2)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|-$$

$$-\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_2(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_2)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|=\pi(\rho(t_1)-\rho(t_2))+$$

$$+\int\limits_{\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-\int\limits_{\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_2)]\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|+$$

$$+\int\limits_{\gamma_2(t_0)\setminus\gamma_1(t_1)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\left(\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}\right)|d\xi|+$$

$$+\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_2(t_0)}[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\left(\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|}|d\xi|-\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}\right)|d\xi|+$$

$$+[\rho(\xi)-\rho(t_1)]\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_1(t_1)}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|=\sum_{i=1}^{6}I_i \qquad (3)$$

Оценим каждый член в сумме *(3)*. Оценим I_2. Известно [11], что

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t|}\right|\le c\,\frac{\omega_t(|\xi-t|)}{|\xi-t|},\quad \forall t\in\gamma.$$

Тогда

$$|I_2|\le c\int\limits_{\gamma_1(t_1)}\omega_\rho^{t_0}(|\xi-t_1|,\max\{|\xi-t_0|,|t_1-t_0|\})\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|}|d\xi|$$

Так как $|\xi-t_0|\le|\xi-t_1|+|t_1-t_0|\le 2|t_1-t_2|+|t_1-t_0|\le 2|t_2-t_0|$, то $\max\{|\xi-t_0|, |t_1-t_0|\}\le 2|t_2-t_0|$.

Отсюда

$$|I_2|\le c\int\limits_{\gamma_1(t_1)}\omega_\rho^{t_0}(|\xi-t_1|,2|t_2-t_0|)\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|}|d\xi|.$$

Для оценки I_2 воспользуемся следующей простой леммой:

Лемма [14]. *Предположим, что f и g монотонные функции действительного переменного и $Af(x)\le f(2x)\le Bf(x)$. Тогда, если $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, то*

$$\int\limits_{\gamma_{\varepsilon_2}(t)\setminus\gamma_{\varepsilon_1}(t)}f(|\xi-t|)g(|\xi-t|)|d\xi|\le c\int\limits_{\varepsilon_1/2}^{2\varepsilon_2}f(x)g(x)dx.$$

Применяя эту лемму, получим

$$|I_2| \le c \int_0^{4|t_1-t_2|} \omega_\rho^{t_0}\left(\tau, 2|t_2-t_0|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau}d\tau$$

Аналогично,

$$|I_3| \le c \int_0^{6|t_1-t_2|} \omega_\rho^{t_0}\left(\tau, 2|t_2-t_0|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Для оценки I_4 воспользуемся следующей леммой.

Лемма [11]. *Если* $|\xi-t_1| \le |\xi-t_2|$, *то* $\left|\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_1|} - \frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}\right| \le$ $\le c|t_1-t_2|\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|^2}$. *Таким образом*

$$|I_4| \le \int_{\gamma_2(t_0)\setminus\gamma_1(t_1)} \omega_\rho^{t_0}\left(|\xi-t_1|, \max\{|\xi-t_0|,|t_1-t_0|\}\right)|t_1-t_2|\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|^2}|d\xi|.$$

Очевидно, что $|\xi-t_0| \le |t_2-t_0|+|t_1-t_2|$. Тогда $|\xi-t_1| \le |\xi-t_0|+|t_0-t_1| \le$ $\le |t_2-t_0|+|t_1-t_2|+|t_0-t_1| \le 2|t_2-t_0|+|t_1-t_2|$.

Значит $\gamma_{|t_2-t_0|+|t_1-t_2|}(t_0) \subset \gamma_{2|t_2-t_0|+|t_1-t_2|}(t_1)$. Учитывая это получим

$$|I_4| \le c|t_1-t_2| \int_{\gamma_{2|t_2-t_0|+|t_1-t_2|}\setminus\gamma_1(t_1)} \omega_\rho^{t_0}\left(|\xi-t_1|, 2|t_2-t_0|+|t_1-t_2|\right)\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|^2}|d\xi| \le$$

$$\le c|t_1-t_2| \int_0^{4|t_2-t_0|+2|t_1-t_2|} \omega_\rho^{t_0}\left(\tau, 2|t_2-t_0|+|t_1-t_2|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau^2}d\tau.$$

Оценим I_5. Имеем

$$|I_5| \le c \int_{\gamma\setminus\gamma_2(t_0)} \omega_\rho^{t_0}\left(|\xi-t_1|, \max\{|\xi-t_0|,|t_1-t_0|\}\right)|t_1-t_2|\frac{\omega_t(|\xi-t_1|)}{|\xi-t_1|^2}|d\xi|.$$

Здесь воспользуемся следующими соотношениями:

$|\xi-t_0| \le |\xi-t_1|+|t_1-t_0| \Rightarrow \max\{|\xi-t_0|,|t_1-t_0|\} \le |\xi-t_1|+|t_1-t_0|$, $\gamma=\gamma_d(t_1)$,

$|\xi-t_0| \ge |t_2-t_0|+|t_1-t_2|$, $|\xi-t_1| \le |\xi-t_0|-|t_0-t_1| \ge |t_2-t_0|+|t_1-t_2|-|t_0-t_1| \ge$ $\ge |t_1-t_2|$.

Тогда

$$|I_5| \le c|t_1-t_2| \int_{|t_1-t_2|/2}^{2d} \omega_\rho^{t_0}\left(\tau, \tau+|t_1-t_0|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau^2}d\tau.$$

Оценим сумму I_1+I_6. Имеем

$$|I_1+I_6| = \left|[\rho(t_2)-\rho(t_1)]\left(\int_{\gamma\setminus\gamma_1(t_1)} \frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi| - \pi\right)\right|.$$

Известно [11], что

$$\left|\int_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(t)} \frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t|}|d\xi|-\pi\right|\le c\omega_t(\varepsilon)$$

Тогда

$$|I_1+I_6|\le\omega_\rho^{t_0}\left(|t_1-t_2|,|t_2-t_0|\right)\left|\int_{\gamma\setminus\gamma_{|t_1-t_2|}(t_2)}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|-\pi-\right.$$

$$\left.-\int_{\gamma_1(t_1)\setminus\gamma_{|t_1-t_2|}(t_2)}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\ln\frac{1}{|\xi-t_2|}|d\xi|\right|\le c\omega_\rho^{t_0}\left(|t_1-t_2|,|t_2-t_0|\right)\left(\omega_t|t_1-t_2|+\right.$$

$$\left.+\int_{\gamma_1(t_1)\setminus\gamma_{|t_1-t_2|}(t_2)}\frac{\omega_t\left(|\xi-t_2|\right)}{|\xi-t_2|}|d\xi|\right)\le c\omega_\rho^{t_0}\left(|t_1-t_2|,|t_2-t_0|\right)\omega_t\left(|t_1-t_2|\right).$$

Значит

$$|\widetilde{\rho}(t_1)-\widetilde{\rho}(t_2)|\le c\left(\int_0^{6|t_1-t_2|}\omega_\rho^{t_0}\left(\tau,2|t_2-t_0|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau}+|t_1-t_2|\times\right.$$

$$\times\int_{|t_1-t_2|}^{4|t_2-t_0|+2|t_1-t_2|}\omega_\rho^{t_0}\left(\tau,|t_2-t_0|+|t_1-t_2|\right)\frac{\omega_t(\tau)}{\tau^2}d\tau+|t_1-t_2|\int_{|t_1-t_2|/2}^{2d}\omega_\rho^{t_0}\left(\tau,\tau+|t_1-t_0|\right)\times$$

$$\left.\times\frac{\omega_t(\tau)}{\tau^2}d\tau+\omega_\rho^{t_0}\left(|t_1-t_2|,|t_2-t_0|\right)\omega_t\left(|t_1-t_2|\right)\right).$$

Учитывая, что $\delta>0,\eta>0,|t_1-t_2|\le\delta,|t_0-t_2|\le\eta,2\eta+\delta\le d,$ получим утверждение теоремы.

Литература

[1]. Freud G. *An approximation theoretical study of the structure of real functions.* Studia Sci. Math., Hungary, 1970, 5, p. 141-150.

[2]. Sallay M. *Uber eine lokal Variante des Priwalowschen Satzes.* Studia Sci. Math., Hungary, 1971, 6, p. 427- 429.

[3]. Мамедханов Дж. И. *Об одном усилении теоремы Племеля- Привалова и заченаилучшей аппроксимации.* Тезисы докл. Конференции, посвященной 70-летию акад. С.Л. Соболева, Новосибирск, 1979.

[4]. Мамедханов Дж.И., Салаев В.В. *Локальные свойства особых интегралов.* В сб. "Специальные вопросы теории функций", вып. III, ИММ Азерб. ССР, 1986, с. 91-133.

[5]. ТамразовП.М. *Гладкости и полиномиальные рпиближения.* "Наукова думка", Киев, 1975, с. 271.

[6]. Дьяченко М.И. *Об одном локальном свойстве сопряженных функций.* Деп. ВИНИТИ № 90- 81, 1981.

[7]. Дьяченко М.И. *Локальные свойства функций и разложения в ряды Фурье.*

Канд. Дисс., Москва, 1980, с. 117.

[8]. СейфуллаевР.К. *Локальные свойства сопряженной функции в метрике L.* В сб."Сингулярные интегральные операторы". Изд. АГУ, Баку, 1983, 83-94.

[9]. Мусаев А. *О некоторых вопросах локализованной аппроксимации в комплексной плоскости.* Канд. дисс. Баку, 1987.

[10]. Рзаев Р.М. *Сингулярный оператор Гильберта в пространствах, связанных с его локыальной структурой.* Деп. ВИНИТИ №3184-82 Деп., 1982.

[11]. Махмудзаде Р.А. *Оценка типа оценки А. Зигмунда для оператора логарифмического потенциала двойного слоя.* Ученые записи МВ и ССО Азерб.ССР сер. Физ.- мат. н., №1, 1976, с. 25-34.

[12]. Махмудзаде Р.А. *Потенциал двойного слоя по гладким кривым и поверхностямв пространствах непрерывных функций.* Канд. дисс., Баку, 1981, с. 97.

[13]. Ловитт У.В. *Линейные интегральные уравнения.* Москва, ГИТТЛ, 1957.

[14]. Сейфуллаев Р.К. *Оценки модулей непрерывности теплового потенциала двойного слоя.* I. Деп. Азерб. НИИНТИ, №740-Аз, 1987, с.28.

Həsənov S.Q.,
Seyfullayev R.Q.

İKİQAT LAYIN LOQARİFMİK POTENSİALIN LOKAL XASSƏLƏRİ

Bu məqalədə qapalı hamar əyrilər üzərində C.İ. Məmmədxanov və V.V. Salayev tərəfindən daxil edilmiş lokal kəsilməzlik modulü terminlərində klassik ikiqat layın loqarifmik potensialının lokal xassələri öyrənilir. Bu potensialın lokal kəsilməzlik modulu sıxlığın lokal kəsilməzlik modulu və əyrinin hamarlığınını göstərən xüsusi xarakteristika vasitəsilə Ziqmund tipli qiymətləndirimə əsaçında fəzaların qurulması yçun mə'lum texnikadan istifadə edərək elə lokal ümumiləşmiş Hölder fəzaları qurmaq olur ki, həmin fəzalarda loqarifmik potensiala uyğun inteqral operator məhdud tə'sir edir.

Hasanov S.G.,
Seifullaev R.K.

LOCAL PROPERTIES OF DOUBLE LAYER LOGARITHMIC POTENTIAL

In this paper we study local properties of classical double layer logarithmic potential along a closed smooth curve in terms of local continuity modulus, introduced by Dj. I/ Mamedkhanov and V.V. Salayev. We prove Zygmund type estimate for the local continuity modulus of potential via local continuity modulus of its density and special characteristic describing the smoothness of curve. Based on this estimate and well-known technique there can be constructed local generalized Hölder spaces in which the operator in question acts boundedly.