УДК 517. 927

ИСКЕНДЕРОВА М.Б.

К ВОПРОСУ О СУММИРУЕМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим краевую задачу, порождённую дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) \equiv y^{(n)}(x) - \lambda^n y(x) + \sum_{i+j<n} p_i \lambda^i y^{(j)}(x) \qquad (1)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} u_j(y) \equiv y^{(\chi_j)}(0) = 0, & j = \overline{1,l} \\ u_j(y) \equiv y^{(\chi_j)}(1) = 0, & j = \overline{l+1,n} \\ 0 \le \chi_1 < \ldots < \chi_{n-1} \le n-1, & \end{cases} \qquad (2)$$

где $p_i = const \neq 0$, λ - комплексный параметр, $|2l-n| = k$.

Пусть L - оператор, соответствующий задаче *(1), (2)*. Известно [1], что система собственных и присоединённых функций (с.с.п.ф.) $\{Y_i(x,\lambda)\}_{i=\overline{1,\infty}}$ оператора L образует полную в $L_2[0,1]$ систему.

По известной теореме Биркгофа при $k = 0$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе разлагается любая функция $f(x)$ из области определения оператора L:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, Z_i) Y_i \qquad (3)$$

где $\{Z_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ - с.с.п.ф. оператора L^*.

При $k > 0$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе могут разлагаться лишь классы операторно- аналитических по М.К. Фаге функций [2], [3]. Что же касается функций из области определения оператора L, то для них на сходимость ряда *(3)* отрицательно сказывается экспоненциальный рост функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ в некоторых секторах комплексной плоскости. В связи с этим при $k > 0$ речь может идти лишь о естественном в данном случае методе суммирования по Абелю.

Определение. *Будем говорить, что с.с.п.ф. оператора* L *обладает свойством суммируемости методом Абеля порядка* γ *рядов Фурье для* $f(x) \in D(L)$, *если в смысле нормы* $L_2[0,1]$ *существует*

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = f(x),$$

где

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(f,z_k)\mathrm{Y}_k\exp\left(-(\sigma\lambda_k)^{\gamma}t\right),$$

здесь σ *- число, подобранное так, чтобы* $\mathrm{Re}(\sigma\lambda_k)^{\gamma}>0$.

Случаи $k\le 2$ и $k\le 4$ изучались, соответственно, в работах [3] и [4]. Предполагаемое в настоящей заметке детальное изучение асимптотики функции Грина задачи *(1)-(2)* с привлечением индикаторных диаграмм позволяет дать ответ на вопрос о суммируемости *(3)* методом Абеля в случае произвольного k, $(1\le k\le n-2)$. ($k=n$ приводит к задаче Коши).

Пусть $k_j=\alpha_j+i\beta_j=r_j\exp i\psi_j$ - корни характеристического уравнения (фактичекси совпадающие с корнями n-ой степени из 1), $\{\lambda_{ik}\}_{i=\overline{1,\infty}}^{k=\overline{1,n}}$ - собственные значения задачи *(1)-(2)*, для ясности изложения принятые за простые нули функции

$$\Delta(\lambda)\equiv\det\{U_i(y_j)\}_{i,j=\overline{1,n}}$$

Обозначим

$$\widetilde{C}=C\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n}U_{\varepsilon}(\lambda_{ij})$$

и пусть символ $/\Omega/$ означает число элементов во множестве Ω.

Известно [5, стр.47], что функция Грина задачи *(1)*, *(2)* имеет вид

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{H(x,\xi,\lambda)}{2\Delta(\lambda)}.$$

Построение $G(x,\xi,\lambda)$ и необходимые её оценки дают следующие результаты:

1. Пусть $n=2m$. Тогда корни k_j $(j=\overline{1,n})$ характеристического уравнения удовлетворяют условию

$$k_j=-k_{j+m} \qquad (4)$$

Имеет место

Теорема 1. *Характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *является целой функцией 1-го порядка роста и удовлетворяет оценке*

$$|\Delta(\lambda)|\underset{|\lambda|\to\infty}{\ge}|\lambda|^{\chi_1+\ldots+\chi_n}M_j\exp\left|\lambda\sum_{\substack{i\in\Omega_j\\|\Omega_j|=n-1}}k_i\right|$$

в каждом из секторов $S_j \in \widetilde{C}$, $j = \overline{0, n} - 1; S_j = \left\{ \varphi : \frac{2\pi}{n} j \le \varphi \le \frac{2\pi}{n}(j+1) \right\}$, *при* $k = 2s \cdot k_1$, *где* k_1 *- чётное;* $S_j = \left\{ \varphi : \frac{\pi}{n}(j-1) \le \varphi \le \frac{\pi}{n}(j+1) \right\}$, *при* $k = 2s \times$ $\times k_1$ *- нечётное. Здесь* $M_j = const \ne 0; \Omega_j = \left\{ j : \operatorname{Re}\lambda \sum_{\substack{i \in \Omega_j \\ |\Omega_j| = n-l}} k_i > \operatorname{Re}\lambda \sum_{\substack{i \in \Omega_s \\ |\Omega_s| = n-l, s \ne j}} k_i \right\}$.

Пусть J_Δ - индикаторная диаграмма функции $\Delta(\lambda)$, а $\overline{J}_\Delta$ - её граница. J_Δ является выпуклым n - угольником с вершинами в точках A_i $(i = \overline{1, n})$:

$$A_i = \sum_{j=i}^{n-l+i-1} k_j\ , \quad (k_{n+s} \equiv k_s).$$

По теореме Полиа в каждом из S_i функция $\Delta(\lambda)$ имеет свой индикатор роста

$$h_\Delta^i(\theta) = \max_{\substack{\Omega_i \subset J_\Delta \\ |\Omega_i| = n-l \\ k_j \in \Omega_i}} \left((\cos\theta) \sum \alpha_j + (\sin\theta) \sum_j \beta_j \right) \qquad (5)$$

Далее, построим и изучим функцию $H(x, \xi, \lambda)$ [5, стр. 47]. Имеет место

Теорема 2. *Функция* $H(x, \xi, \lambda)$ *является целой функцией 1-го порядка роста и имеет вид:*

$$H(x,\xi,\lambda) \underset{x \ge \xi}{=} \lambda^{\chi_1 + \ldots + \chi_n} \cdot \left(\sum_S \sum_{\Omega = n-l} [B_\Omega] \exp\left(\lambda k_s (x - \xi) + \lambda \sum_{\substack{i \in \Omega, \\ s \in \Omega}} k_i \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_s \sum_{|\Omega_1| = n-l-1} [C_{\Omega_1}] \exp\left(\lambda k_s x + \lambda k_t (1 - \xi) + \lambda \sum_{\substack{i \in \Omega_1 \\ s_1 t \in \Omega_1}} k_i \right) \right),$$

$$H(x,\xi,\lambda) \underset{x < \xi}{=} \lambda^{\chi_1 + \ldots + \chi_n} \cdot \left(\sum_S \sum_{|\Omega_1| = n-l-1} [C_{\Omega_1}] \exp\left(\lambda k_s x + \lambda k_t (1 - \xi) + \lambda \sum_{\substack{i \in \Omega_1 \\ s_1 t \in \Omega_1}} k_i \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_i \sum_{|\Omega_1| = n-l-1} [D_{\Omega_1}] \left(\exp \lambda k_i (1 + x - \xi) + \lambda \sum_{\substack{s \in \Omega_1 \\ t \in \Omega_1}} k_s \right) \right). \qquad (6)$$

Индикаторной диаграммой J_H функции $H(x, \xi, \lambda)$ является выпуклый n - угольник с вершинами в точках B_i $(i = \overline{1, n})$:

$$B_i = \sum_{j=i}^{n-l+i} k_j \quad , \qquad (k_{n+s} \equiv k_s) \quad ,$$

и имеет в каждом из секторов $\widetilde{S}_i$ $(i = \overline{0, 2n} - 1)$

$$\widetilde{S}_i = \left\{ \varphi : \frac{\pi}{n}(i-1) \le \varphi \le \frac{\pi}{n} i \right\} ,$$

свой индикатор роста

$$h_H^i = \max_{\substack{\theta \in \widetilde{S}_i \\ k_j \in \Omega_i \\ |\Omega_i| = n-l+1 \\ \Omega_i \in J_H}} \left((\cos\theta) \sum \alpha_i + (\sin\theta) \sum \beta_i \right) . \tag{7}$$

Тогда [6, стр.73] функция $G(x,\xi,\lambda)$ в каждом из секторов $D_i = \widetilde{S}_i \cap S_i$, $\left(i = \overline{1,2n}\right)$ имеет свой индикатор роста

$$h_G^i(\theta) = h_H^i(\theta) - h_\Delta^i(\theta) . \tag{8}$$

Имеем

1) при $l = m$, $(k = 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ J_H \subseteq J_\Delta \\ б)\ \bar{J}_H \cap \bar{J}_\Delta = \{B_1, \ldots, B_n\} \end{array}\right\} \Rightarrow h_G^i(\theta) \le 0, \quad \forall \theta \in [0; 2\pi];$$

2) при $l = m+1$, $(k = 2)$:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ J_\Delta \subseteq J_H \\ б)\ \bar{J}_\Delta \cap \bar{J}_H = \{A_1, \ldots, A_n\} \end{array}\right\} \Rightarrow h_G^i(\theta) \ge 0, \quad \forall \theta \in [0; 2\pi],$$

$$h_G^1(\theta) = h_G^2(\theta) = \ldots = h_G^n(\theta) = 0 \text{ при } \theta = \arg \overrightarrow{OA_i} \left(i = \overline{1,n}\right)$$

Так как в выражениях для A_i, B_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ при $k > 2$ более не участвуют пары, удовлетворяющие условию *(4)*, то имеем:

3) $m+1 \le l \le n-1$

$$\left.\begin{array}{l} a)\ J_\Delta \subset J_H \\ б)\ \bar{J}_\Delta \cap \bar{J}_H \ne \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow h_G^i(\theta) > 0, \quad \forall \theta \in [0; 2\pi].$$

Дальнейшие рассуждения и результаты для случаев 1), 2) совпадают с результатами в [3]. Что же касается случая 3) , то как сразу следует из *(5)-(7)*, функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи *(1)*, *(2)* хоть и растёт экспоненциально по любому направлению, но в каждом из D_j $\left(j = \overline{1,2n}\right)$ имеет свой индикатор $h_G^j(\theta)$.

Таким образом, в $2n$ секторах раствором π/n функция $G(x,\xi,\lambda)$ имеет n (попарно совпадающих) индикаторов роста $h_G^j(\theta)$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Имеет место

Теорема 3. *Функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (1), (2) является целой функцией 1-го порядка и имеет n индикаторов роста.*

Так же, как и в [5] сходимость *(3)* связана со сходимость интеграла

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \, d\lambda . \tag{9}$$

Наряду с *(9)* рассмотрим интеграл

$$J(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\exp\left(-(\lambda\sigma)^{\gamma}t\right)\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\,d\lambda \quad . \qquad (10)$$

здесь Γ - система расширяющихся контуров построенных обычным образом [5]. Воспользуемся леммой [5].

Лемма. *Для того, чтобы ряд (3) равномерно суммировался методом Абеля порядка* γ *к* $f(x)\in D(L)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to+0} J(x,t)=f(x) \quad .$$

Положим $\lambda=R\exp i\varphi$. Подобрав γ из условия

$$\mathrm{Re}\left(\lambda k_i(x-\xi)-(\lambda\sigma)^{\gamma}t\right)\le 0\,,\quad \lambda\in D_i \qquad (11)$$

получим, что при $t>\dfrac{r_i}{R^{\gamma-1}}$ и $1<\gamma\le n$ неравенство *(11)* выполнено всюду в $D_i\ \left(i=\overline{1,2n}\right)$ и интеграл *(10)* существует. Просчитав по вычетам и воспользовавшись леммой, получим:

Теорема 4. *Ряд Фурье по с.с.п.ф. задачи (1), (2) равномерно суммирует методом Абеля порядка*

$$1<\gamma\le n$$

при всех $1\le k\le n-2$ *и* $\forall x\in[0;1]$.

Замечание. Случай $n=2m+1$ рассматривается аналогично (с учётом смещения секторов S_j, $\widetilde{S}_j$).

Литература

[1]. Шкаликов А.А. *О полноте собственных и присоединённых функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.* Функциональный анализ 10, вып. 4 (1976г.), с.69-80.

[2]. Хромов А.П. *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.* Математический сборник 70 (1966г.), с.310-329.

[3]. Хромов А.П. *О суммировании разложений по собственным функциям краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с распадающимися краевыми условиями и об одном аналоге теоремы Вейерштрасса.* Сб. "Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды Фурье", Саратовский университет, 1968.

[4]. Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. *О суммируемости разложений по собственным функциям операторов.* Функциональный анализ, т.12, №4, 1978, Москва.

[5]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* Москва, "Наука", 1968.

[6]. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* Москва, Гостехиздат, 1956.

İskəndərova M.B.

QEYRİ-REQULYAR SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏR UÇUN MƏXSUSİ FUNKSİYALAR ÜZRƏ AYRILIŞMALARIN YIĞILMASI HAQQINDA

Məqalədə Keldış tipli cüt tərtibli diferensial tənlik üçün qeyri-requlyar sərhəd məsələsinə baxılır və həmin məsələ üçün məxsusi funksiyalar üzrə Furye ayrılışların Abel mə'nada yığılması öyrənilir.

Iskenderova M.B.

ON SUMMING OF SERIES OF EIGEN FUNCTIONS OF THE HIGHT ORDER UNREGULAR BOUNDARY PROBLEM

It was studed the problem of summing by Able series of eigen functions for the hight order differential equation with unregular boundary conditions.