УДК 517.5

МАМЕДХАНОВ Дж. И., ТАГИ-ЗАДЕ Э.Дж.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-ИБРАГИМОВА

В данной статье мы будем рассматривать оценки, связывающие различные нормы многочленов, заданных в различных метрических пространствах. Такие оценки мы будем называть неравенствами типа Никольского-Ибрагимова.

Отметим, что подобные неравенства для тригонометрических полиномов впервые были получены в работах Джексона, но они не получили своего дальнейшего развития.

В дальнейшем, для целых функций, подобное неравенство с определенной константой, близкой к точной были получены С.М. Никольским [1]. Он использовал эти неравенства в теоремах вложения, благодаря чему и была создана новая теория вложения.

Эти оценки были улучшены, в смысле константы, в различных исследованиях Н.К. Бари [2], Ибрагимова И.И. [3], Тимана А.Ф. [4] и др.

Для алгебраических многочленов подобное неравенство с точной константой, для некоторых p и p' получено И.И. Ибрагимовым:

$$\|P_n\|_{p'} \le (p+1)^{1/p - 1/p'} n^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|P_n\|_p \qquad (1)$$

где $1 \le p \le p' \le \infty$ и

$$\|P_n\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |P_n(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

Здесь мы используя работу [5], получим неравенство типа Никольского-Ибрагимова на кривых, из довольно общего класса, и при этом, как следствие из этих оценок, получим более точные, в смысле константы, для некоторых p, оценки на отрезке $[-1,1]$.

Пусть Γ есть произвольная спрямляемая кривая Жордена, $Z = Z(S)$ $0 \le s \le l$, l - длина кривой Γ есть уравнение кривой Γ, $d(Z,t)$ - расстояние от точки $Z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{u}}$, $d\left(\frac{1}{u}\right) = \min_{Z\in\Gamma} d\left(Z, \frac{1}{u}\right)$ где функция $\varphi(Z)$ отображает внешность кривой Γ на внешность единичной окружност

γ_0, а совокупность точек Z на которых $|\varphi(Z)| = 1+\frac{1}{u}$ определяет линию уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{u}}$.

Справедлива следующая

Теорема. *Если* Γ *есть произвольная спрямляемая кривая Жордана и* $1 \le p \le p' \le \infty$, *то*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \le 2^{1+p/p'}\left(\frac{2e}{d\left(\frac{1}{u}\right)}\right)^{1-p/p'}\|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \qquad (2)$$

где

$$\|P_n\|_{L_q(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |P_n(Z)|^p |dZ|\right)^{1/p}$$

Доказательство. Пусть $Z = Z(S)$ $(0 \le s \le l)$ и

$$M_n = \sup_{Z\in\Gamma}|P_n(Z)| = \left|P_n\left(Z_0^{(n)}\right)\right|, \quad Z_0^{(n)} = Z_0^{(n)}\left(S_0\right) \in \Gamma$$

Обозначим через γ_n дугу кривой Γ (или множество точек Γ), на которой выполняется соотношение

$$|P_n(Z)| \ge \frac{1}{2}M_n, \quad Z \in \gamma_n$$

а через $l(\gamma_n)$ нижнюю грань длин дуг γ_n.

Очевидно, имеем:

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma)} = \left\{\int_\Gamma |P_n(Z)|^p |dZ|\right\}^{1/p} \ge \left\{\int_{\gamma_n} |P_n(Z)|^p |dZ|\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \frac{M_n}{2}\left\{\int_{\gamma_n}|dZ|\right\}^{1/p} = \frac{M_n}{2}\left(l(\gamma_n)\right)^{1/p}$$

Откуда

$$|P_n(Z)| \le 2\left[l(\gamma_n)\right]^{-\frac{1}{p}}\|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \qquad (3)$$

Теперь определим величину $l(\gamma_n)$. Следуя методу, приведенному в [5], получим

$$P_n'(Z) \le \frac{e}{d\left(Z, \frac{1}{n}\right)}\|P_n\|_{C(\Gamma)}$$

Отсюда и из формулы

$$\left|P_n(Z)-P_n\left(Z_0^{(n)}\right)\right|\le\int_{S_0}^{S_1}\left|P_n'(Z(\xi))\right|\left|d\xi\right|,\quad Z_1\in\Gamma,$$

При $Z_1=Z$, находим

$$\left|P_n(Z)-P_n\left(Z_0^{(n)}\right)\right|\le\frac{e}{d\left(\frac{1}{n}\right)}M_n\left|S-S_0\right|,$$

или

$$\left|P_n(Z)\right|\ge M_n-\frac{e}{d\left(\frac{1}{n}\right)}\left|S-S_0\right|M_n$$

Очевидно, полагая $\left|S-S_0\right|\le\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{2e}$, получим

$$\left|P_n(Z)\right|\ge\frac{M_n}{2}$$

Тваким образом, в данном случае

$$mesl(\gamma_n)\ge\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{2e}\Bigg|$$

Отсюда и из неравенства *(3)*, находим

$$\left|P_n(Z)\right|\le2\left(\frac{2e}{d\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{1/p}\left\|P_n\right\|_{L_p(\Gamma)}$$

Благодаря этому, из очевидного неравенства

$$\left\|P_n\right\|_{L_{p'}(\Gamma)}\le\max_{Z\in\Gamma}\left|P_n(Z)\right|^{\frac{p'-p}{p'}}\left\|P_n\right\|_{L_p(\Gamma)}^{p/p'}$$

нетрудно получить требуемую оценку *(2)*

Следствие 1. *Пусть* $\Gamma\equiv[-1,1]$ *и* $1\le p\le p'\le\infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|P_n\right\|_{L_{p'}[-1,1]}\le2^{1-\frac{p}{p'}}\left(12en^2\right)^{1/p-1/p'}\left\|P_n\right\|_{L_p[-1,1]}\qquad(4)$$

Это непосредственное следствие из теоремы, если учесть, что для $\Gamma\equiv[-1,1]$ справедливо соотношение (см. [6], стр. 258)

$$d\left(\frac{1}{n}\right)\ge\frac{1}{6n^2}\text{ , при }n\ge2$$

Отметим, что оценка *(4)* совпадает в смысле порядка оценкой *(1)*, приведенной в работах [3] и [4], а для достаточно больших p, в частности $p>70$ улучшает ее в смысле константы.

Следствие 2. *Пусть* $\Gamma = \{Z : |Z| = 1\}$ *и* $1 \le p \le p' \le \infty$. *Тогда, имеем*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \le 2^{1-\frac{p}{p'}} (2en)^{1/p - 1/p'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \tag{5}$$

Эта оценка, непосредственно получается из оценки *(2)*, если учесть, что в случае $\Gamma = \{Z : |Z| = 1\}$, справедливо равенство

$$d\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Отметим, что оценка *(5)* совпадает, в смысле порядка, с заведомо точной, в смысле порядка соответствующей оценкой для тригонометрических полиномов, полученной в работах Н.К. Бари [2], И.И. Ибрагимова [3] и А.Ф. Тимана (см. [4] стр. 243), а при некоторых значениях p улучшает их в смысле константы.

Кроме того, следует отметить, что из оценки *(2)* можно извлечь неравенства с определенными константами и на значительно более широких классах кривых, если воспользоваться точными оценками для величины $d\left(\frac{1}{n}\right)$, полученными П.М. Тамразовым (см., например [7] стр. 180-181).

Литература

[1]. Никольский С.М. Труды института математики АН СССР им. Стеклова, XXXVII, 1951, с. 244-277.

[2]. Бари Н.К. Изв. АН СССР ,№12 , 1954, с. 159-176.

[3]. Ибрагимов И.И. Мат. сб., т. 52 (94):3, 1960, с. 863-878.

[4]. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* Физматгиз., Москва, 1960.

[5]. Мергелян С.Н. *Успехи мат. наук,* 7:2 (48), 1952, стр. 31-122.

[6]. Дзадыч В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* "Наука", Москва, 1977.

[7]. Тамразов П.М. *Гладкости и полиномиальные приближения.* Киев, "Науково думка", 1975.

C.İ. Məmmədxanov,
E.C. Tağı-zadə.

BƏZİ NİKOLSKİ-İBRAQİMOV TİPLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR HAQQINDA

Bü məqalədə biz müxtəlif metrik fəzalarda verilmiş müxtəlif çoxhədlilərin normalarını birləşdirən qiymətlərə baxırıq. Belə qiymətləri biz Nikolski-İbrahimov tipli bərabərsizliklər adlandıracağıq.

J.I. Mamedkhanov,
A.I. Tagi-zade

ON SOME NIKOLSKY-IBRAGIMOV TYPE INEQUALITIES

In this paper we consider the estimates, which connect different norm of polynomials, defined in different metric spases. Such estimated we'll call Nicolsky-Ibragimov type enequalities.