УДК 517.977

МАХМУДОВ Н.М.

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ФУНКЦИОНАЛОМ ЛИОНСА.

В этой работе исследуются вопросы конечно-разностной аппроксимации одной задачи оптимального управления для квантомеханической системы, описываемой линейным уравнением Шредингера, когда управление входит в коэффициент уравнения и критерий качества является функционалом Лионса, который введен впервые в работе [1]. При этом устанавливается оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу. Ранее подобные вопросы для задач оптимального управления коэффициентом уравнения Шредингера в других поствновках исследованы, например, в работах [2, 3].

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(v)=\int_{\Omega}|\psi_1-\psi_2|^2\,dxdt \tag{1}$$

на множестве $V\equiv\left\{v: v=v(x,t), v\in W_2^{0,1}(\Omega), 0<b_0\le v(x,t)\le b_1, \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|\le b_2, \overset{\circ}{\forall}(x,t)\in\Omega\right\}$ при условиях:

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}-v(x,t)\psi_k=f_k(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{2}$$

$$\psi_k(x,0)=\varphi_k(x),\quad x\in(0,l),\quad k=1,2 \tag{3}$$

$$\psi_1(0,t)=\psi_1(l,t)=0,\quad \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}=0,\quad t\in(0,T) \tag{4}$$

где $\Omega=(0,l)\times(0,T)$, $i=\sqrt{-1}$, a_0, b_0, b_1, b_2, l, $T>0$ - заданные числа, функции $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, $k=1,2$ удовлетвлряют условиям:

$$\varphi_1\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l),\quad \varphi_2\in W_2^2(0,l),\quad \frac{d\varphi_2(0)}{dx}=\frac{d\varphi_2(l)}{dx}=0, \tag{5}$$

$$f_k\in W_2^{0,1}(\Omega),\quad k=1,2 \tag{6}$$

Функциональные пространства $W_2^{0,1}(\Omega)$, $W_2^2(0,l)$ ведены, например, в работе [4].

При принятых предположениях из результатов работы [3] можно получить, что смешанная задача *(2)-(4)*, имеет единственное почти всюду решение $\psi_1 \in \overset{\circ}{W}(\Omega), \psi_2 \in W(\Omega)$ и для них справедлива оценка

$$\|\psi_k\|^2_{W(\Omega)} \le c_{1k}\left(\|\psi_k\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f_k\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{7}$$

где $c_{1k} > 0,\ k = 1,2$ - некоторые постоянные,

$$\overset{\circ}{W}(\Omega) \equiv \left\{\psi_1 : \psi_1 \in L_\infty\left(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)\right), \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \in L_\infty\left(0,T;L_2(0,l)\right)\right\},$$

$$W(\Omega) \equiv \left\{\psi_2 : \psi_2 \in L_\infty\left(0,T;W_2^2(0,l)\right), \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \in L_\infty\left(0,T;L_2(0,l)\right)\right\}.$$

Кроме того, можно доказать, что задача оптимального управления *(1)-(4)* имеет хотя бы одно решение, то есть $V^* \equiv \left\{v^* \in V,\ J(v^*) = J_* = \inf_{v \in f} J(v)\right\} \ne 0$.

Рассмотрим разностную аппроксимацию *(1)-(4)*. С этой целью введем последовательность сеток:
$\left\{(x_j, t_k)_n\right\}$ $n = 1,2,\dots,\ j = \overline{0,M_n},\ k = \overline{0,N_n},\ x_j = jh - h/2,\ t_k = k\tau,\ h = h_n = l/(M_n - 1)$, $\tau = \tau_n = T/N_n$. Обозначим $M = M_n,\ N = N_n,\ \delta_t \Phi_{jk} = (\Phi_{jk} - \Phi_{jk-1})/\tau$, $\delta_x \Phi_{jk} = (\Phi_{j+1k} - \Phi_{jk})/h,\ \delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk} = (\Phi_{j+1k} - 2\Phi_{jk} + \Phi_{j-1k})/h^2,\ V_n \equiv \{[v]_n : [v]_n =$ $= \{v_{jk}\},\ 0 < b_0 \le v_{jk} \le b_1,\ j = \overline{1,M-1},\ k = \overline{1,N},\ |\delta_t v_{jk}| \le b_2,\ j = \overline{1,M-1},\ k = \overline{2,N}\}$

При каждом натуральном $n \ge 1$ рассмотрим задачу о минимизации функции

$$I_n([v]_n) = \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\Phi^1_{jk} - \Phi^2_{jk}\right|^2 \tag{8}$$

на мнжестве V_n при условиях

$$\delta_t \Phi^p_{jk} + a_0 \delta_{xx} \Phi^p_{jk} - v_{jk} \Phi^p_{jk} = f^p_{jk}, \quad j = \overline{1,M-1},\ k = \overline{1,N} \tag{9}$$

$$\Phi^p_{j0} = \varphi^p_j, \quad j = \overline{0,M},\ p = 1,2 \tag{10}$$

$$\Phi^1_{0k} = \Phi^1_{Mk} = 0, \quad \delta_{\bar{x}} \Phi^2_{1k} = \delta_{\bar{x}} \Phi^2_{Mk} = 0, \quad k = \overline{1,N} \tag{11}$$

где сеточные функции $\varphi^p_j,\ f^p_{jk},\ j = \overline{1,M-1},\ k = \overline{1,N},\ p = 1,2,$ являются усреднениями по Стеклову функций $\varphi_p(x),\ f_p(x,t),\ p = 1,2,$ причем $\varphi^1_0 =$ $= \varphi^1_M = 0,\ \varphi^2_0 = \varphi^2_1,\ \varphi^2_M = \varphi^2_{M-1}$.

Применяя методику получения априорных оценок с помощью суммарных тождеств для решения разностной схемы *(9)-(11)* можно доказать справедливость оценки:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\Phi^p_{jm}\right|^2 \le c_{2p}\left(h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi^p_j\right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|f^p_{jk}\right|^2\right) \tag{12}$$

для любого $m \in \{1,2,\dots,N\}$, где $c_{2p} > 0,\ p = 1,2$ - некоторые постоянные, независящие от h и τ.

Для установления оценки погрешности разностной схемы *(9)-(11)* рассмотрим следующую систему

$$i\delta_t Z_{jk}^p + a_0\delta_{xx} Z_{jk}^p - v_{jk} Z_{jk}^p = F_{jk}^p, \quad j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{13}$$

$$Z_{j0}^p = 0, \quad j=\overline{0,M},\ p=1,2 \tag{14}$$

$$Z_{0k}^1 = Z_{Mk}^1 = 0, \quad \delta_x Z_{1k}^2 = \delta_{\bar{x}} Z_{Mk}^2 = 0, \quad k=\overline{1,N} \tag{15}$$

где $Z_{jk}^p = \Phi_{jk}^p - \psi_{jk}^p$, $\{\Phi_{jk}^p\}$ $p=1,2$ - решение разностной схемы *(9)-(11)*, а $\{\psi_{jk}^p\}$ $p=1,2$ - усреднения по Стеклову решения смешанной задачи *(2)-(4)* в области $[t_{k-1},t_k]\times[x_j-h/2,\ x_j+h/2]$. Функция F_{jk}^p, $p=1,2$ определяется формулой:

$$F_{jk}^p = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(i\frac{\partial\psi_p}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2} - v(x,t)\psi_p\right)dxdt - i\delta_t\psi_{jk}^p - a_0\delta_{xx}\psi_{jk}^p + v_{jk}\psi_{jk}^p,$$

$$j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,N} \tag{16}$$

Определим оператор Q_n на множестве V формулой:

$$Q_n(v) = \{w_{jk}\} \quad w_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j+h/2}^{x_j+h/2} v(x,t)dxdt, \quad j=\overline{1,M-1}, \quad k=\overline{1,N} \tag{17}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия согласования:* $c_3 \le h/\tau \le c_4$, *где* $c_3, c_4 > 0$, *постоянные, независящие от* h *и* τ. *Тогда верна оценка:*

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^p - \psi_{jm}^p\right|^2 \le c_{3p}\left(\beta_{\tau,h} + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_{jk} - w_{jk}\right|^2\right) \tag{18}$$

для $\forall\, m \in \{1, 2, \ldots, N\}$, *где* $c_{3p} > 0$, $p=1,2$ - *некоторые постоянные, независящие от* h *и* τ, $\beta_{\tau,h} > 0$, $\beta_{\tau,h} \to 0$ *при* $\tau \to 0$, $h \to 0$, $p=1,2$.

Если оценим разность функционала *(1)* и функции *(8)*, то с помощью оценок *(7)*, *(12)* и теореы 1 можно доказать справедливость оценки:

$$\left|J(v) - I_n([v]_n)\right| \le c_5\left(\sqrt{\beta_{\tau,h}} + \left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_{jk} - W_{jk}\right|^2\right)^{1/2}\right) \tag{19}$$

где $c_5 > 0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ.

Далее доказывая вспомогательные леммы и используя методику работы [5] установлена оценка сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в виде:

$$\left|I_{n*} - J_*\right| \le c_6\sqrt{\beta_{\tau,h}} \tag{20}$$

где $c_6 > 0$ - постоянная не зависит от h и τ, I_{n*} - нижняя грань функции $I_n([v]_n)$, а J_* - нижняя грань функционала $J(v)$.

Литература

[1]. Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениям с частными производными.* М., "Мир", 1972.

[2]. Ягубов Г.Я. *Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера.* Автореферат докт. дисс.- Киев, 1994.

[3]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. *Разностный метод решения вариационной постановки одной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.* Изв. АН Азербайджана, Сер матем. физ. техн., 1995, т. XVI, №1-2, с.46-51.

[4]. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М., "Наука", 1975.

[5]. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М., "Наука", 1981.

Mahmudov N.M.

KVANTO-MEXANİKİ SİSTEMLƏRİN LİONS FUNKSİONALI İLƏ OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI MƏSƏLƏSİNİN SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ

İşdə xətti Şredinqer tənliyi ilə təsvir olunan kvanto-mexaniki sistem üçün optimal idarə etmə məsələsinin həllinə sonlu fərqlər üsulu tətbiq olunmuş və sonlu fərqli approksimasiyaların funksioanla görə yığılması üçün qiymətləndirmə isbat edilmişdir. Keyfiyyət kriteri olaraq Lions funksionalı götürülmüşdür.

Mahmudov N.M.

FINITE DIFFERENCE METHOD SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR QUANTOMECHANICAL SYSTEM WITH LIONS FUNCTIONAL

In this work finite difference method was applied for solution of optimal control problem by coefficient of linear Shrödinger equation, with Lions quality criterian.