УДК 517. 977

МИРЗАМАГОМЕДОВ К.Н.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

В этой работе изучаются вопросы корректности постановки и необходимых условий оптимальности в задачах управления гиперболо-параболической системы. При этом доказываются существование и единственность решения и устанавливаются необходимые условия оптимальности. Отметим, что подобные задачи оптимального управления для гиперболо- параболической системы ранее исследованы в работах [1-3] и др.

Пусть D - ограниченная область n - мерного евклидова пространства $E_n, n \le 3, \Gamma$ - граница области D, которая предполагается достаточно гладкой, $x = (x_1, x_2, x_n) \in D$ - произвольная точка области D, $t_1 > 0$ - заданное число, $t \in (0,t_1), \Omega_1 = D \times (0,t), \Omega = \Omega_{t_1}, S_t = \Gamma \times (0,t), S = S_{t_1}$. Через $L_p^{(m)}(\Omega)$ обозначим пространство m - мерных вектор-функций, измеримых и суммируемых со степенью $p \ge 1$, норма в котром определяется формулой:

$$\|v\|_{L_p^{(m)}(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega |v_j(x,t)|^p dxdt \right)^{1/p} .$$

Пусть $V \equiv \Big\{ v : v = (v_1, v_2, \dots, v_6), v_j \in L_2(\Omega), \|v_j\|_{L_2(\Omega)} \le b_j, j = \overline{1,4},$

$v_j \in L_\infty(\Omega), 0 < \alpha_j \le v_j(x,t) \le b_j, j = 5,6 \ \overset{\circ}{\forall}(x,t) \in \Omega \Big\},$ где $b_j, j = \overline{1,6}, \alpha_j, j =$ $= 5,6$ - заданные положительные числа. Функциональные пространства $W_p^{k,m}(\Omega), V_2^{1,0}(\Omega), p \ge 1, k, m > 0$ - определены, например в работе [4].Обозначим

$$B \equiv (L_2(\Omega))^4 \times (L_\infty(\Omega))^2, \quad H = (L_2(\Omega))^6 .$$

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J_\alpha(v) = \sum_{j=1}^{3} \beta_j \int_S |U_j(\xi,t) - y_j(\xi,t)|^2 d\xi dt +$$

$$+ \beta_0 \int_S |T(\xi,t) - y_0(\xi,t)|^2 d\xi dt + \alpha \|v - w\|_H^2 \qquad (1)$$

на множестве V при условиях:

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(2a_0(x,t)\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right)+a_1(x,t)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-a_2(x,t)T\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}(1-\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_0(x,t)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right]=v_j(x,t),\quad j=\overline{1,3}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_6(x,t)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+v_5(x,t)T=v_4(x,t), \tag{3}$$

$$U_j(x,0)=\varphi_{0j}(x),\quad x\in D,\quad \frac{\partial U_j(x,0)}{\partial t}=\varphi_{1j}(x),\quad j=\overline{1,3}, \tag{4}$$

$$T(x,0)=\varphi(x),\quad x\in D, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}\nu_i\Big|_S=0,\quad (\xi,t)\in S, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{3}v_6\frac{\partial T}{\partial x_i}\nu_i\Bigg|_S=0,\quad (\xi,t)\in S, \tag{7}$$

где $U=(U_1,U_2,U_3)$, $\varphi_0=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03})$, $\varphi_1=(\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13})$, δ_{ij} - символы Кронекера, $\varphi_{0j}\in W_2^1(D)$, $\varphi_{1j}\in L_2(D)$, $j=\overline{1,3}$, $\varphi\in L_2(D)$ - заданные функции, $a_j(x,t)$, $j=\overline{0,2}$ - заданные ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered} a_j\in W_\infty^{0,1}(\Omega),\quad 0<a_j^0\le a_j(x,t)\le a_j^1,\\ \left|\frac{\partial a_j(x,t)}{\partial t}\right|\le\gamma_j,\quad j=0,1,\quad \mathring{\forall}(x,t)\in\Omega; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} a_2\in W_\infty^{1,0}(\Omega),\quad 0<a_2^0\le a_2(x,t)\le a_2^1,\\ \left\|\frac{\partial a_2(x,t)}{\partial t}\right\|\le\gamma_2\quad \mathring{\forall}(x,t)\in\Omega, \end{gathered} \tag{9}$$

где a_j^0, a_j^1, γ_j, $j=\overline{0,2}$ - заданные положительные числа, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ - внешняя нормаль границы Γ в точке $\xi\in\Gamma$, $\nu_i=\cos(x_i,\nu)$, $i=\overline{1,3}$, а σ_{ij} имеют вид:

$$\sigma_{11}=2a_0\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+a_1\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-a_2T,$$

$$\sigma_{22}=2a_0\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+a_1\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-a_2T,$$

$$\sigma_{33}=2a_0\frac{\partial U_3}{\partial x_3}+a_1\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}-a_2T,$$

$$\sigma_{ij}=a_0\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),\quad i\ne j,\quad i,j=\overline{1,3},$$

$\alpha \geq 0$ - заданное число, $\beta_j \geq 0$ - заданные числа, такие, что $\sum_{j=0}^{3} \beta_j \neq 0$, $\omega \in H$ - заданный элемент, $y_j \in L_2(S)$, $j = \overline{1,3}$ - заданные функции.

При каждом фиксированном $v \in V$ задачу об определении функций $U(x,t)$, $T(x,t)$ из условий *(2)-(7)* назовем редуцированной задачей.

Определение 1. *Под решением редуцированной задачи (2)-(7) будем понимать функции* $U_j \in W_2^{1,1}(\Omega)$, $T \in V_2^{1,0}(\Omega)$, *удовлетворяющие интегральным тождествам:*

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial U_j}{\partial t}\frac{\partial \eta_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij} \left[2a_0(x,t)\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + a_1(x,t)\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - a_2(x,t)T \right] \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} (1-\delta_{ij}) a_0(x,t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_j} \right\} dxdt =$$

$$= \int_D \varphi_{1j} \eta_j(x,0) dx + \int_{\Omega} v_j(x,t) \eta_j dxdt \quad , \tag{10}$$

$$\int_{\Omega} \left[-T\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_6(x,t) \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} + v_5(x,t) T \eta_0 \right] dxdt =$$

$$= \int_D \varphi(x) \eta(x,0) dx + \int_{\Omega} v_4(x,t) \eta_0 dxdt \tag{11}$$

для любых функций $\eta_j \in W_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta_j(x,t_1) = 0$ *и условиям*

$$U_j(x,0) = \psi_{0j}(x), \quad x \in D, \quad j = \overline{1,3}. \tag{12}$$

Предположим, что существует единственное решение редуцированной задачи и справедливы оценки:

$$\|U\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leq c_1 \left[\left(\sum_{j=1}^{3} \|v_j\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{3} \|\varphi_{0j}\|^2_{W_2^1(D)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{3} \|\varphi_{1j}\|^2_{L_2(D)} \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|\varphi\|_{L_2(D)} + \|v_4\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad , \tag{13}$$

$$\|T\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_2 \left[\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|v_4\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad , \tag{14}$$

где c_1, $c_2 > 0$ - некоторые постоянные.

Доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Существует плотное подмножество G из пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (1)-(7) имеет единственное решение.*

Далее вводится функция Гамильтона-Потрягина для задачи *(1)-(7)* и доказываются необходимые условия в виде вариационного неравенства и принципа максимума Понтрягина [5].

Литература

[1]. Айдазаде К.Р., Мирзамагомедов К.Н. – Изв. АН Азерб., Сер. физ. техн. и матем., 1994, т.XV, №1-2.
[2]. Вигак С.Е. *Оптимальное управление термоупругой системой.* М.,1979.
[3]. Гардашов Т.Б., Бахышов Ш.М. *Идентификация характеристик математической модели линейной системы термоупругости.*- В сб.: "Математическое моделирование и автоматизация системы", Баку, 1990.
[4]. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.*-М.: Наука, 1975.
[5]. Плотников В.И., Сикорская Е.Р.- Изв. ВУЗов. Сер. Радиофизика, 1972, т.15, №3, с.345-357.

Mirzəmaqamedov K.N. **HİPERBOLO-PARABOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ**

Baxılan optimal idarəetmə məsələsinin korrektliyi üçün teorem isbat olunmuşdur. Bundan başqa optimallıq üçün zəruri şərtlər də alınmışdır.

Mirzamagomedov K.N. **OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR HIPERBOLO- PARABOLICAL SYSTEM OF EQUATIONS**

For considering problem studed the correctness of defination and nessasary conditions of optimality.