УДК 517. 984

ПАШАЕВ Р.Т.

К ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Работа посвящена исследованию прямой и обратной задачи теории рассеяния для граничной задачи, порождаемой на полуоси $0 \le x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} k^2 y, & a < x < \infty \\ -\dfrac{1}{k^2} y, & 0 < x \le a \end{cases} \tag{1}$$

и граничным условием

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2}$$

где функция $q(x)$ вещественна и удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty, \quad \int_0^a |q(x)|^2 dx < \infty. \tag{3}$$

В случае обыкновенного уравнения Штурма- Луивилля подобные задачи полностью исследованы в монографии [3], в работе [2].

1. Прямая задача рассеяния.

Обозначим через $\varphi(x,k)$ решение уравнения *(1)* с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = h$, а через $f(x,k)$- с условием $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1$.

Согласно работе [1] при $x > a$ решение $f(x,k)$ имеет вид

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x,t)e^{ikt}dt \tag{1.1}$$

где ядро $K(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,t)| \le C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad \sigma(x) \equiv \int_x^\infty |q(t)|dt \tag{1.2}$$

и

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty |q(t)|dt \tag{1.3}$$

Справедлива следующая

Лемма 1.1. *При всех вещественных $k \neq 0$ справедливо тождество*

$$-\frac{2ik\varphi(x,k)}{hf(0,k)-f'(a,k)} = f(x,-k)-S(k)f(x,k) \qquad (1.4)$$

где

$$S(k)=\frac{hf(0,-k)-f'(0,-k)}{hf(0,k)-f'(0,k)}=\overline{S(-k)}=[S(-k)]^{-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$F(k)=-hf(0,k)+f'(0,k)$$

Из (1.1)-(1.2) следует, что функция $F(k)$ непрерывна на вещественной оси и допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im}k>0$.

Лемма 1.2. *Функция $F(k)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}k>0$ бесконечное число нулей с единственной предельной точкой $k=0$. Все эти нули простые и лежат на мнимой оси.*

Обозначим через ik_n нули функции $F(k)$. Далее, определим m_n, полагая

$$m_n^2=\left(\int_a^\infty |f(x,ik_n)|^2dx+\frac{1}{k_n^4}\int_0^a |f(x,ik_n)|^2dx\right)^{-1}$$

Определение 1.1. *Совокупность величин $\{S(k), ik_n, m_n\}$ называется данными рассеяния для уравнения (1).*

2. Обратная задача рассеяния.

Обратная задача рассеяния для граничной задачи *(1)*, *(2)* состоит в востановлении коэффициента $q(x)$ и числа h по данным рассеяния.

Сначала докажем, что коэффициент $q(x)$ при $x \geq a$ однозначно определяется по данным рассеяния. С этой целью выводится основное уравнение типа Марченко для функции $K(x,t)$, входящей в выражение *(1.1)* специального решения $f(x,k)$.

Теорема 2.1. *При каждом $x \geq a$ ядро $K(x,t)$ оператора преобразования (1.1) удовлетворяет основному уравнению*

$$F(x+y)+K(x,y)+\int_x^\infty K(x,t)F(t+y)dt=0, \quad (0<x<y)$$

где

$$F(x)=\sum_n m_n^2e^{-k_nx}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S(k)+e^{-2ika}\right]e^{ikx}dx$$

Теперь докажем, что основное уравнение однозначно разрешимо в пространстве $L_1(a,\infty)$.

Так как оператор $(Ff)y = \int\limits_x^{\infty} f(t)F(t+y)dt$ является вполне непрерывным в $L_{1,2}(a;\infty)$, то достаточно показать, что однородное уравнение

$$f(y) + \int\limits_x^{\infty} f(t)F(t+y)dt = 0 \qquad (2.1)$$

имеет только тривиальное решение. Заметим, что решения уравнения *(2.1)*, принадлежащие пространству $L_1(a;\infty)$, ограничены, и, следовательно, принадлежат также пространству $L_2(a;\infty)$. Поэтому однородное уравнение *(2.1)* достаточно исследовать в пространстве $L_2(a;\infty)$.

Предположим, что $f(y)$- решение уравнения *(2.1)*. Умножим обе части равенства *(2.1)* на $f(y)$ и проинтегрируем по $y \in (x;\infty)$. В результате получим

$$\int\limits_x^{\infty} |f(y)|^2 dy + \int\limits_x^{\infty}\int\limits_x^{\infty} f(t)\overline{f(y)}F(t+y)dtdy = 0$$

Подставим выражение $F(t+y)$ в этом равенстве, обозначая

$$\tilde{f}(k) = \int\limits_x^{\infty} f(y)e^{-iky}dy$$

после несложных преобразований получим

$$\sum_n m_n^2 \left|\tilde{f}(-ik_n)\right|^2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\tilde{f}(k) - S(k)\tilde{f}(-k)\right\}\overline{\tilde{f}(k)}dk = 0 \qquad (2.2)$$

Поскольку $|S(k)| = 1$ согласно неравенству Коши- Буняковского

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k)\tilde{f}(-k)\overline{\tilde{f}(k)}dk\right|^2 \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(-k)\right|^2 dk \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk$$

или

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(k)\tilde{f}(-k)\overline{\tilde{f}(k)}dk\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk$$

Следовательно, второе слагаемое в правой части формулы *(2.2)* неотрицательно. Поэтому равенство *(2.2)* выполняется тогда и только тогда, когда

$$\tilde{f}(-ik_n) = 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\tilde{f}(k) - S(k)\tilde{f}(-k)\right\}\overline{\tilde{f}(k)}dk = 0 \qquad (2.3)$$

Из последнего соотношения непосредственно получим равенство

$$\tilde{f}(k) - S(k)\tilde{f}(-k) = 0 \qquad (2.4)$$

Наоборот, если выполняются соотношения *(2.3)* и *(2.4)*, то $f(y)$ удовлетворяет уравнению *(2.1)*.

Написав *(2.4)* в виде

$$\frac{\tilde{f}(k)}{F(-k)} = \frac{\tilde{f}(-k)}{F(k)}$$

в силу *(2.3)* получим, что функция $\dfrac{\tilde{f}(k)}{F(-k)}$ является целой функцией и так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{f}(k)}{F(-k)} = 0$$

то $\tilde{f}(k) \equiv 0$, следовательно $f(y) = 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 2.2. *Основное уравнение имеет единственное решение в пространстве* $L_1(a;\infty)$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 2.3. *Коэффициент уравнения (1)* $q(x)$ *при* $x \ge a$ *однозначно восстанавливается по данным рассеяния.*

Теперь покажем, что коэффициент $q(x)$ при $0 \le x \le a$ и число h также однозначно определяются по данным рассеяния граничной задачи *(1)*, *(2)*.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \le x \le a \tag{2.5}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2.6}$$

$$y'(a) = 0 \tag{2.7}$$

Очевидно, что $\varphi\left(x, \dfrac{i}{\lambda}\right)$ является решением уравнения *(2.5)*, удовлетворяющего условию *(2.6)*. Поэтому квадраты корней уравнения

$$\varphi'\left(a, \frac{i}{\lambda}\right) = 0 \tag{2.8}$$

являются собственными значениями краевой задачи *(2.5)*- *(2.7)*. Хорошо известно [2], что уравнения *(2.8)* имеет счетное число действительных корней λ_n. Собственной функцией задачи *(2.5)-(2.7)*, соответствующей собственному значению λ_n, является функция $\varphi\left(x, \dfrac{i}{\lambda_n}\right)$, а числа

$$\alpha_n = \left(\int_0^a \left|\varphi\left(x, \frac{i}{\lambda_n}\right)\right|^2 dx\right)^{-\frac{1}{2}}$$

называются нормированными числами той же задачи.

Нетрудно показать, что имеет место формула

$$\alpha_n^2 = \frac{-2\lambda_n}{\varphi\left(a,\frac{i}{\lambda_n}\right)\dot{\varphi}\left(a,\frac{i}{\lambda_n}\right)} \qquad (2.9)$$

В работе [2] полностью решена задача об определении функции $q(x)$ и числа h по спектральным данным $\{\lambda_n\}$ и $\{\alpha_n\}$. Мы сведем нашу задачу, т.е. определение $q(x)\,(0 \le x \le a)$ и h по данным рассеяния, к этой задаче.

Из соотношения *(1.4)* имеем

$$\frac{\varphi'(a,k)}{\varphi(a,k)} = \frac{f'(a,-k) - S(k)f'(a,k)}{f(a,-k) - S(k)f(a,k)} \qquad (2.10)$$

Пусть нам известны данные рассеяния граничной задачи *(1)*, *(2)*. Тогда мы находим $q(x)$ при $x \ge a$, а также $f(a,k)$, $f'(a,k)$.

Следовательно, правая часть равенства *(2.10)* будет известна. Поэтому мы можем найти корни уравнения $\varphi'(a,k) = 0$, т.е. корни уравнения *(2.8)*. Так как $\varphi'\left(a,\frac{i}{\lambda}\right)$ - функция экспоненциального типа, то по корням $\{\lambda_n\}$ однозначно восстанавливается функция $\varphi'\left(a,\frac{i}{\lambda_n}\right)$. Тогда из формулы *(2.10)* однозначно восстанавливается и функция $\varphi\left(a,\frac{i}{\lambda_n}\right)$, а по формуле *(2.9)*- числа α_n.

Таким образом, по данным рассеяния граничной задачи *(1)*, *(2)* однозначно находятся спектральные данные задачи λ_n и α_n.

Итак, мы доказали следующее утверждение

Теорема 2.4. *Коэффициент уравнения (1)* $q(x)\,(0 \le x \le a)$ *и число* h *из граничного условия (2) однозначно определяются по данным рассеяния задачи (1), (2).*

Литература

[1]. Левин Б.Я. *Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решения дифференциального уравнения второгопорядка.* ДАН СССР, 1956, 106, №2, с. 187-190.

[2]. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. *Об определении дифференциального оператора по двум спектрам.* УМН, 1964, 19, вып. 2, с.263-266.

[3]. Марченко В.А. *Операторы Штурма-Луивилля и их приложения.* Киев, "Наукова думка", 1977, с.330.

Paşayev R.T.

KƏF-XƏTTİ ŞTURM-LİUVİLL OPERATORLAR DƏSTƏSİ ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN TƏRS MƏSƏLƏSİNƏ NƏZƏRİYYƏSİ

İşdə

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} k^2 y, \, a < x < \infty \\ -\dfrac{1}{k^2} y, \, 0 < x \le a \end{cases}$$

tənliyinin və

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

sərhəd şərtinin doğurduğu sərhəd məsələsi üçün səpilmənin düz və tərs məsələləri öyrənilmişdir, burada $q(x)$ funksiyası həqiqi olub

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty, \quad \int_0^a |q(x)|^2 dx < \infty$$

şərtlərini ödəyir.

Pashayev R.T.

TO THE THEORY OF SCANTTERING INVERSE PROBLEMS FOR LINEAR-FRACTIONAL BOUNDLE OF STURM-LIOUVILLE DIFFERENTICL OPERATORS

In this work a straight and an invers problems of scattering theory for the boundary problem

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} k^2 y, \, a < x < \infty \\ -\dfrac{1}{k^2} y, \, 0 < x \le a \end{cases} \qquad (1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \qquad (2)$$

are inverstigated. There the function $q(x)$ is real and satisfied the following conditions

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty, \quad \int_0^a |q(x)|^2 dx < \infty. \qquad (3)$$