УДК 517.43

ИСКЕНДЕРОВА М.Б.

СУММИРУЕМОСТЬ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В прстранстве $L_2[0;1]$ рассматривается краевая задача для дифференциального выражения келдышевского типа

$$l(y,\lambda) \equiv y^{(n)}(x) - \lambda^n y(x) + \sum_{i+j<n} p_i \lambda^i y^{(j)}(x) \qquad (1)$$

и распадающихся краевых условий

$$\begin{cases} U_j(y) \equiv y^{(\gamma_j)}(0) = 0, & j = \overline{1,l} \\ U_j(y) \equiv y^{(\gamma_j)}(1) = 0, & j = l + \overline{1,n} \end{cases} \qquad (2)$$

где $0 \le \chi_1 < \ldots < \chi_l \le n-1$; $0 \le \chi_{l+1} < \ldots < \chi_{n-1} \le n-1$; $p_i = const \ne 0$, λ - комплексный параметр и $|2l - n| = k$. Пусть $L(\lambda)$ - оператор, соответствующий задаче *(1)-(2),* и $n = 2m+1$.

Известно, что система собственных функций (с.с.ф.) оператора L образуют полную в $L\,[0;1]$ систему. По известной т. Биркгофа в случае $k = 0$ (регулярные краевые условия) в равномерно сходящийся ряд Фурье разлагается любая функция $f(x)$ из области определения $D(L)$ оператора L:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i Y_i(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, Z_i) Y_i(x,\lambda), \qquad (3)$$

где $\{Z_i(x,\lambda)\}_{i=\overline{1,\infty}}$ - с.с.ф. оператора L^*. Этот результат получается сравнительно легко благодаря оценке функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$:

$$|G(x,\xi,\lambda)|_{|\lambda|\to\infty} \le \frac{C}{|\lambda|^{n-1}} \qquad (4)$$

имеющей место всюду в $\widetilde{C} = C \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} U_\varepsilon(\lambda_{ij})$, где $\{\lambda_{ij}\}$ - собственные значения оператора L.

В случае $k > 0$ (нерегулярные краевые условия) оценка *(4)* функции $G(x,\xi,\lambda)$ нарушается, в связи с чем возникают трудности при изучении вопросов разложимости функций в ряды по с.с.ф. таких задач.

При $k \le 2$ в [3] было показано, что ряд *(3)* можно суммировать методом Абеля порядка $\gamma > 1$ для всякой функции $f(x) \in D(l)$. Эта возможность появлялась в связи с тем, что при $k \le 2$ оценка *(4)* функции Грина сохранялась в n секторах, что позволяло применить метод работы [4].

В случае $k > 2$ функция $G(x, \xi, \lambda)$ задачи *(1)-(2)* экспоненциально растет по любому направлению в $\widetilde{C}$.

В работе [6] показано, что несмотря на это возможность суммирования рядов Фурье методом Абеля сохраняется в случае $k \le 4$.

В предлагаемой статье изучается вопрос суммируемости методом Абеля в случае $1 \le k \le n-2$.

Постановка задачи, основные обозначения и теоремы.

В $L_2[0;1)$ рассмотрим, вначале, конкретно задачу для $n = 9$.

$$l(y,\lambda) \equiv y^{(IX)}(x) - \lambda^9 y(x) \qquad (1')$$

$$\begin{cases} U_j(y) \equiv y^{(j-1)}(0) = 0, \quad j = \overline{1,8} \\ U_9(y) \equiv y(1) = 0, \end{cases} \qquad (2')$$

Имеем: $k = 2l - n = 7 > 4$.

Известно, что фундаментальная система решений уравнения *(1')* состоит из функций

$$y_i(x,\lambda) = \exp \lambda k_i x, \quad i = \overline{1,9}$$

где k_i - характеристические числа, а λ - собственные значения задачи *(1')-(2')*.

Введем обозначения:

$$k_j = \exp i\left(\frac{2\pi}{9} j\right), \quad j = \overline{0,8}, \quad k_j \text{ - корни из } \sqrt[9]{1}$$

$$\lambda = R \exp i\varphi$$

Имеет место теорема (см. [3])

Теорема. *Если* $n - l = 2v + 1$, *то у краевой задачи (1')-(2') бесконечное множество собственных чисел, которые при некотором целом* h *удовлетворяют асимптотическим формулам:*

$$\lambda_{k+h} = \frac{2k - 1 - l - \dfrac{2\beta_1}{n}}{2 \sin \dfrac{l}{n}\pi}\pi + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = 1,2\ldots \qquad (*)$$

где $\beta_1 = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_9$.

Отметим, что собственные значения краевой задачи *(1')-(2')* образуют 9 серий $\{\lambda_j\}_{j=\overline{1,\infty}}$ $\left(\{\lambda_{ij}\}_{j=\overline{1,\infty}}^{i=\overline{1,9}}\right)$, асимптотически расположенных внутри углов, содержащих серединные перпендикуляры к сторонам индикаторной диаграммы J_Δ функции $\Delta(\lambda) \equiv \det\left\{U_i\left(y_j\right)\right\}_{i,j=\overline{1,9}}$.

Как отмечалось выше, с.с.п.ф. $\left\{Y_i(x,\lambda)\right\}_{i=\overline{1,\infty}}$ краевой задачи *(1')-(2')* полна в $L_2[0;1]$. Покажем, что имеет место

Основная теорема. *Ряд Фурье по с.с.п.ф. краевой задачи (1')-(2') суммируем методом Абеля порядка* $\gamma=\left(\gamma_1,\ldots,\gamma_9\right)$ *к* $f(x)\in D(L)$ / $f(0)=f(1)=0$.

Дадим

Определение. *Будем говорить, что ряд Фурье по собственным функциям оператора* L *для функции* $f(x)\in L_2[0;1]\cap D(L)$ *суммируем методом Абеля порядка* γ, *если в смысле* $\| \ \|_{L_2}$ *существует*

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=f(x),$$

где

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(f,z_k\right)\exp\left(-\left(\sigma\lambda_k\right)^{\gamma} t\right)J_k(x) \qquad (5)$$

Здесь σ *- число такое, что* $\operatorname{Re}\left(\sigma\lambda_k\right)^{\gamma}>0$ *при* $\operatorname{Re}\left(\sigma\lambda_k\right)>0$.

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$F(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} e^{-(\sigma\lambda)^{\gamma} t}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi d\lambda, \qquad (6)$$

где Γ - система расширяющихся контуров, построенных специальным образом.

Имеет место (см. [6])

Лемма. *Для того, чтобы ряд Фурье для* $f(x)$ *по с.с.п.ф. опреатора* L *суммировался методом Абеля порядка* γ *необходимо и достаточно, чтобы существовал в смысле* $\| \ \|_{L_2}$ *предел*

$$\lim_{t\to+0} F(x,t)=F(x,0) \qquad (7)$$

при этом ряд суммируется равномерно, если предел (7) существует равномерно.

В связи с этим займемся построением и нахождением асимптотической оценки функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ краевой задачи *(1')-(2')*.

Необходимые асимптотические оценки.

Как известно, функция Грина вычисляется следующим образом [2]:

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{H(x,\xi,\lambda)}{2\Delta(\lambda)},$$

где

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left\{U_i\left(y_j\right)\right\}_{i,j=\overline{1,9}},$$

а

$$H(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x) & \dots & y_9(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_9) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_9(g) & U_9(y_1) & \dots & U_9(y_9) \end{vmatrix}$$

Изучим, вначале, асимптотику функции $\Delta(\lambda)$, для чего введем в рассмотрение индикатор роста функции $\Delta(\lambda)$:

$$h_\Delta(\varphi) \doteq \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln\left|\Delta\left(R\cdot\exp i\varphi\right)\right|}{R}$$

По теореме Полиа [6], $h_\Delta(\varphi) = K(-\varphi)$, где $K(-\varphi)$- опорная функция сопряженной диаграммы. Для функции $\Delta(\lambda)$ имеем:

$$K(\varphi) = k_{i+1} = K_j\,, \quad \text{при} \quad \varphi \in S_i\,,$$

$$\text{где } i = \overline{0{,}8} \quad \left(S_0 \equiv S_9\right),$$

а сектора $S_j \quad \left(j = \overline{1{,}9}\right)$ выписываются следующим образом:

$$S_i = \left\{\varphi \left| arctg \frac{\cos\psi_i - \cos\psi_{i-1}}{\sin\psi_{i-1} - \sin\psi_i} \right|\right\}$$

Отметим, что раствор каждого из секторов $S_j \quad \left(j = \overline{1{,}9}\right)$ равен $\frac{2\pi}{9}$. Таким образом имеет место

Лемма 1. *Характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *задачи (1')-(2') является целой функцией 1-го порядка роста и удовлетворяет асимптотической оценке*

$$\left\|\Delta(\lambda)\right\| \underset{|\lambda|\to\infty}{\geq} |\lambda|^{1+\dots+7} e^{\lambda K_j(\varphi)}$$

в каждом из секторов $S_j \quad \left(j = \overline{1{,}9}\right)$.

Необходимые посторроения и оценки функции $H(x,\xi,\lambda)$ приводят к леммам:

Лемма 2. *Функция* $H(x,\xi,\lambda)$ *является целой функцией 1-го роста и имеет вид:*

$$H(x,\xi,\lambda) \underset{x\geq\xi}{=} \lambda^{1+\dots+7}\left(\sum_{i,j=1}^{9} A_{ij} \exp\left(\lambda k_i(x-\xi) + \lambda k_j\right) + \right.$$

$$+\sum_{s,t=1}^{9} B_{s,t}\exp\left(\lambda k_s x+\lambda k_t(1-\xi)\right)\Bigg),$$

$$H(x,\xi,\lambda)\underset{x<\xi}{=}\lambda^{1+\ldots+7}\left(\sum_{s,t=1}^{9} B_{s,t}\exp\left(\lambda k_s x+\lambda k_t(1-\xi)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{9} C_{i,j}\exp\lambda k_i(1+x-\xi)\right)$$

Лемма 3. *Функция $H(x,\xi,\lambda)$ имеет 9 индикаторов роста $h_H^j(\varphi)$ в каждом из секторов $D_j=R_0^{\frac{\pi}{9}}(S_j)$.*

На основании лемм 1-3 доказывается

Теорема 1. *Функция Грина $G(x,\xi,\lambda)$ краевой задачи (1')-(2')*

а) при $x<\xi$ удовлетворяет асимптотической оценке

$$\left|G(x,\xi,\lambda)\right|\underset{|\lambda|\to\infty}{\le}\frac{M}{|\lambda|^8}\qquad (M=const)$$

всюду в $\widetilde{C}$,

б) при $x\ge\xi$

$$\left|G(x,\xi,\lambda)\right|\underset{|\lambda|\to\infty}{\le}|\lambda|^{-8}\begin{cases} M_1\exp\lambda k_9(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_1=\left\{0\le\varphi\le\frac{\pi}{9}\right\}\\ M_2\exp\lambda k_1(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_2=\left\{\frac{\pi}{9}\le\varphi\le\frac{2\pi}{9}\right\}\\ M_3\exp\lambda k_8(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_3=\left\{\frac{2\pi}{9}\le\varphi\le\frac{3\pi}{9}\right\}\\ M_4\exp\lambda k_9(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_4=\left\{\frac{3\pi}{9}\le\varphi\le\frac{4\pi}{9}\right\}\\ M_5\exp\lambda k_7(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_5=\left\{\frac{4\pi}{9}\le\varphi\le\frac{5\pi}{9}\right\}\\ M_6\exp\lambda k_8(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_6=\left\{\frac{5\pi}{9}\le\varphi\le\frac{2\pi}{3}\right\}\\ M_7\exp\lambda k_6(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_7=\left\{\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le\frac{7\pi}{9}\right\}\\ M_8\exp\lambda k_7(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_8=\left\{\frac{7\pi}{9}\le\varphi\le\frac{8\pi}{9}\right\}\\ M_9\exp\lambda k_5(x-\xi), & \lambda\in\widetilde{D}_9=\left\{\frac{8\pi}{9}\le\varphi\le\pi\right\}\end{cases}$$

(в нижней полуплоскости ситуация симметричная).

Таким образом, в каждом из секторов $\widetilde{D}_j = S_j \bigcap D_j$ функция $G(x,\xi,\lambda)$ имеет свой индикатор роста [5]:

$$h_G^j(\varphi) = h_H^j(\varphi) - h_\Delta^j(\varphi) > 0.$$

Теорема суммируемости.

Как следует из теоремы 1, функция $G(x,\xi,\lambda)$ экспоненциально растет по любому направлению в $\widetilde{C}$, и, т.о., $F(x)$, а вместе с ней и ряд *(3)*, расходятся.

Рассмотрим, однако, возможность подбора порядка суммирования γ в методе Абеля для задачи *(1')-(2')*.

В связи с этим в каждом из секторов $\widetilde{D}_j\left(j=\overline{1,9}\right)$ подберем число γ_j так, чтобы

1) $\gamma_j > 1$ (см. [3])
2) $\operatorname{Re}\lambda^{\gamma_j} > 0$
3) $\operatorname{Re}\left(\lambda k_j(x-\xi) - \lambda^{\gamma_j} t\right) \le 0$

(ситуация в нижней полуплоскости аналогична).

Имеем:

1) в секторе $\widetilde{D}_1 = \left\{ \varphi \mid 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{9} \right\}$

$$\frac{16\pi}{9} \le \varphi + \psi_9 \le \frac{17\pi}{9}$$

положим $\gamma_1 = 2, \Rightarrow 0 \le 2\varphi \le \dfrac{2\pi}{9}$ и условия 1,2 выполнены. Далее:

$$\operatorname{Re}\left(\lambda K_9(x-\xi) - \lambda^2 t\right) \le R\cos(\varphi+\psi_9) - R^2 t\cos 2\varphi =$$
$$= R\left(\cos(\varphi+\psi_9) - Rt\cos 2\varphi\right)$$

Положим $t_1 \ge \dfrac{\cos(\varphi+\psi_9)}{R\cos 2\varphi}, \Rightarrow t \underset{|\lambda|=R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ и, учитывая *(*)*, условие *3* выполнено. Аналогично:

2) в $\widetilde{D}_2 : \left\{\dfrac{\pi}{9} \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{9}\right\}$ $\dfrac{\pi}{9} \le \varphi + \psi_1 \le \dfrac{2\pi}{9}; \gamma_2 = 2 > 1$

$$\frac{2\pi}{9} \le 2\varphi \le \frac{4\pi}{9} \text{ и } \operatorname{Re} 2\varphi > 0; \quad t_2 \ge \frac{\cos\varphi}{R\cos 2\varphi} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0 \qquad (*)$$

3) $D_3 : \left\{\dfrac{2\pi}{9} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}\right\}$

$$\frac{16\pi}{9} \le \varphi + \psi_8 \le \frac{17\pi}{9};\ \gamma_3 = 7 \Rightarrow \frac{14\pi}{9} \le 7\varphi \le \frac{7\pi}{9}$$

и $t_3 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_8)}{R^6 \cos 7\varphi} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

4) в $\widetilde{D}_4 : \left\{ \dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{4\pi}{9} \right\}$

$$\frac{19\pi}{9} \le \varphi + \psi_9 \le \frac{20\pi}{9};\ \gamma_4 = 5\ ,\ t_4 \ge \frac{\cos(\varphi + \psi_9)}{R^4 \cos 5\varphi};\ t_4 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0 \qquad (*)$$

5) в $\widetilde{D}_5 : \left\{ \dfrac{4\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{9} \right\}$, $\gamma_5 = 4$, $t_5 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_7)}{R^3 \cos 4\varphi}$; $t_5 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

6) в $\widetilde{D}_6 : \left\{ \dfrac{5\pi}{9} \le \varphi \le \dfrac{2\pi}{3} \right\}$, $\gamma_6 = 3$, $t_6 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_8)}{R^2 \cos 3\varphi}$; $t_6 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

7) в $\widetilde{D}_7 : \left\{ \dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{9} \right\}$, $\gamma_7 = 3$, $t_7 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_6)}{R^2 \cos 3\varphi}$; $t_7 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

8) в $\widetilde{D}_8 : \left\{ \dfrac{7\pi}{9} \le \varphi \le \dfrac{8\pi}{9} \right\}$, $\gamma_8 = 2$, $t_8 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_5)}{R \cos 2\varphi}$; $t_8 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

9) в $\widetilde{D}_9 : \left\{ \dfrac{8\pi}{9} \le \varphi \le \pi \right\}$, $\gamma_9 = 2$, $t_9 \ge \dfrac{\cos(\varphi + \psi_7)}{R \cos 2\varphi}$; $t_9 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} +0$ (*)

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Существует вектор* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_9)$ *такой, что функция* $G_1(x,\xi,\lambda) = e^{-\lambda^{\gamma} t} G(x,\xi,\lambda)$ *удовлетворяет оценке (4) в каждом из секторов* $\widetilde{D}_j$ *(* $j = \overline{1,18}$ *- с учетом нижней и верхней полуплоскости), причем*

$$\lim_{t\to+0} G_1(x,\xi,\lambda) = G(x,\xi,\lambda)$$

Таким образом, функция $F(x,t)$ существует, более того, к ней применимы все рассуждения регулярного случая.

Просчитав по вычетам *(6)*, получим представление $F(x,t)$ в виде ряда *(5)*. Тогда доказательство сходимости *(5)* следует из сходимости *(7)*. Поскольку *(7)* сходится (в силу подбора γ), то **основная теорема** доказана.

Полученный результат обобщается на случай дифференциального выражения *(1)* и краевых условий *(2)*, указанных в начале статьи.

Благодарю профессора А.Г. Костюченко за постановку задачи.

Литература

[1]. Шкаликов А.А. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.* Функ. анализ, т.10, вып. 4, 1976.
[2]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М., 1968.
[3]. Хромов А.В. *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.* Мат. сб., №70, 1966.
[4]. Лидский В.Б. *О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов.* Труды Моск. Мат об-ва, XI, 1962.
[5]. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М., 1956.
[6]. Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. *О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки.* Функ. анализ, т.12, вып. 4 , 1978.

İskəndərova M.B. TƏK TƏRTİBLİ QEYRİ-REQULYAR SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN QOŞMA FUNKSİYAOARI ÜZRƏ CƏMLƏMƏ

Keldış tipli differensial tənliklər üçün qurulmuş qeyri-requlyar sərhəd məsələnin qoşma funksiyalar üzrə Furye sırasının Abel mənada yığılması isbat edilib.

Iskenderova M.B. **THE SUMMING BY ADJONTFUNCTIONS OF THE ODD ORDER IRREGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEM**

The problem about summing by Able series on eigen functions of the high-order Celdesh type differential equation with the irregular boundary conditions was studied in this article.