УДК 517.983

ИСМАИЛОВ З.И.

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ИНДЕКСЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА

Оператор *A*, опеределенный в гильбертовом пространстве *H*, как известно, называется нормально разрешимым, если его область значений *R(A)* замкнута в *H*.

Обозначим через $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ размерность множества нулей $\ker A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ и дефектного подпространства $R^{\perp}(A)$ ($\perp$ – ортогональное дополнение) оператора A в гильбертовом пространства H соответственно. Упорядоченную пару числа $(\alpha(A), \beta(A))$ будем называть *d*-характеристикой оператор A . Если оба чисел $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны, то о *d*-характеристика операторе A будем говорить, что она конечна, а разность $\chi(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ будем называть индексом оператора A .

Если существует ограниченный обратный оператор A^{-1} определенный на всем пространстве H , то он называется ограниченно обратимым в *H*.

В гильбертовом пространстве $L_2(H,(0,1))$ вектор-функций рассмотрим дифференциальный оператор L второго порядка вида

$$l(u) = u''(t) + Au(t), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$u(1) = T_0 u(0),$$
$$u'(1) = T_1 u'(0),$$

где A-вполне непрерывный оператор в $L_2(H,(0,1))$, а T_0, T_1 – *линейные* ограниченные операторы в гильбертовом пространстве *H*.

Сопряженный оператор L^* к оператору L в $L_2(H,(0,1))$ порождается дифференциальным выражением

$$l^+(\vartheta) = \vartheta''(t) + A^*\vartheta(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

и граничными условиями

$$\vartheta(0) = T_1^*\vartheta(1),$$
$$\vartheta' u(0) = T_0^*\vartheta'(1).$$

Ясно, что оператор L^* плотно определен в $L_2(H,(0,1))$, поэтому существует $(L^*)^*$ и $L^{**} = \overline{L}$. По этой причине мы без ограничения общности можем считать, что оператор L замкнут в $L_2(H,(0,1))$.

Общая теория о нормально разрешимых операторах, дефектных числах и индексах изложения в [1], [2]. Теория разрешимости краевых задач на конечном отрезке для обыкновенных дифференцильных операторов с непрерывными коэффициентами разработана в [2]. Свойство фредгольмости $(\ker(\cdot) = 0, R^{\perp}(\cdot) = 0)$ для некоторых дифференциальных операторов второго порядка на конечном отрезке исследована в [3]. Работа [4] посвящена изучению разрешимости одной операторной краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения эллиптического типа второго порядка на полуоси в терминах операторных коэффициентов.

В настоящей работе исследуется связь нормальной разрешимости и индекса оператора L с нормальными разрешимостями и индексами операторных коэффициентов T_0, T_1.

1. Легко доказать следующее

Утверждение 1.1.. *Если* $T_0 T_1^* = E$, $T_1^* T_0 = E$, *то оператор* L *самосопряжен*

В этом пункте в дальнейшем преположим, что $A = 0$, и обозначим через $L_0 = L$.

Легко можно установить, что верна

Теорема 1.1. *1) Если* $\ker(T_0 - E) = \{0\}$ *и* $\ker(T_1 - E) = \{0\}$, *то* $\ker L_0 = \{0\}$;

2) Если $\ker(T_0 - E) = \{0\}$ *и* $\dim \ker(T_1 - E) = m$, *то* $\dim \ker L_0 = m$;

3) Если $\ker(T_1 - E) = \{0\}$ *и* $\dim \ker(T_0 - E) = n$, *то* $\dim \ker L_0 = n$;

4) Если $\ker(T_1 - E) = \{0\}$ *и* $T_0 - E$ *нормально разрешим, то и оператор* L_0 *нормально разрешим в* $L_2(H, (0,1))$;

5) Если $\ker(T_0 - E) = \{0\}$ *и оператор* $T_1 - E$ *нормально разрешим в* H, *то оператор в* L_0 *нормально разрешим в* $L_2(H, (0,1))$;

Докажем следующую теорему:

Теорема 1.2. *Если операторы* $T_1 - E$ *и* $(T_1 - E) - (T_0 - E)$ *нормально разрешимы в* H, *то оператор* L_0 *нормально разрешим в* $L_2(H, (0,1))$.

Доказательство. Пусть последовательность функций $L_0 u_n(t) = f_n(t)$, $u_n(t) \in D(L_0)$, $n = 1,2,\ldots$ сходится к некоторой функции $f(t)$ в $L_2(H, (0,1))$, Ясно, что

$$(T_0 - E) f_n^0 = f_n' + \int_0^1 \int_0^\tau f_n(s)\,ds\,d\tau, \qquad (1.1)$$

$$(T_1 - E) f_n' = \int_0^1 f_n(s)\,ds, \qquad (1.2)$$

$$u_n(t) = t f_n' + f_n^0 + \int_0^t \int_0^\tau f_n(s)\,ds\,d\tau, \quad n = 1,2,\ldots$$

Поскольку последовательность $\left\{\int_0^1 f_n(s)ds\right\}$ сходится в H к $\int_0^1 f(s)ds$, то из нормальной разрешимости оператора $T_1 - E$ следует, что существует такой элемент $f' \in H$, что

$$(T_1 - E)f' = \int_0^1 f\ (s)ds$$

С другой стороны справедлива

$$(T_1 - E)(T_0 - E)f_n^0 = \int_0^1 f_n(s)ds + \int_0^1\int_0^\tau (T_1 - E)f_n(s)dsd\tau$$

Поскольку правая часть последнего равенства сходится к элементу

$$\int_0^1 f\ (s)ds + \int_0^1\int_0^\tau (T_1 - E)f\ (s)dsd\tau,$$

и оператор нормально разрешим в H, то существует вектор $f^0 \in H$ такой, что

$$(T_1 - E)(T_0 - E)f_n^0 = \int_0^1 f_n(s)ds + (T_1\ - E)\int_0^1\int_0^\tau f(s)dsd\tau.$$

или то же самое

$$(T_1 - E)(T_0 - E)f^0 = (T_1\ - E)f' + (T_1\ - E)\int_0^1\int_0^\tau f(s)dsd\tau.$$

Из последнего имеем

$$(T_1 - E)((T_0 - E)f^0 - f' - \int_0^1\int_0^\tau f(s)dsd\tau) = 0,$$

т.е.

$$(T_0 - E)f^0 = (f' + g') + \int_0^1\int_0^\tau f(s)dsd\tau, \quad g' \in \ker(T_1 - E).$$

Теперь рассмотрим функцию вида

$$u(t) = tf'' + f^0 + \int_0^t\int_0^\tau f(s)dsd\tau,$$

$f'' = f' + g'$. Ясно, что $u(t) \in D(L_0)$ и удовлетворяет граничным условием. Теорема доказана.

Теорема 1.3. *Если* $\|T_0 + T_1 - T_1T_0\| < 1$, *то оператор* L_0 *нормально разрешим в* $L_2(H,(0,1))$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $L_0u_n(t) = f_n(t)$, *n=1,2,...* сходится к *f(t)* в $L_2(H,(0,1))$. Тогда из соотношений (1.1) и (1.2) имеем

$$(T_1 - E)(T_0 - E)f_n^0 = \int_0^1 f_n(s)ds + \int_0^1\int_0^\tau (T_1\ - E)f_n(s)dsd\tau, \quad n = 1,2,\ldots$$

Отсюда имеем

$$f_n^0 = (T_0 + T_1 - T_1T_0)f_n^0 + F(f_n),$$

где

$$F(f_n) = \int_0^1 f_n(s)ds + (T_1 - E)\int_0^1\int_0^\tau f_n(s)dsd\tau, \quad n = 1,2,...$$

Легко видеть, что

$$f_n^0 = (T_0 + T_1 - T_1T_0)^2 f_n^0 + (T_0 + T_1 - T_1T_0)F(f_n) + F_n(f) =$$

$$= ... = (T_0 + T_1 - T_1T_0)^m f_n^0 + \sum_{k=0}^{m-1}(T_0 + T_1 - T_1T_0)^k F(f_n).$$

Если в последнем равенстве перейти к переделу при $m \to \infty$, то получаем

$$f_n^0 = (E - (T_0 + T_1 - T_1T_0))^{-1} F_n(f),$$

а отсюда при $n \to \infty$ следует, что

$$f^0 = \lim_{n\to\infty} f_n^0 = (T_1T_0 - T_1 - T_0 + E)^{-1}\left(\int_0^1 f(s)ds + (T_1 - E)\int_0^1\int_0^\tau f(s)dsd\tau\right)$$

Тогда сходится и последовательность

$$f_n' = (T_0 - E)f_n^0 - \int_0^1\int_0^\tau f_n(s)dsd\tau, \quad n = 1,2,...$$

и

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n' = (T_0 - E)f^0 - \int_0^1\int_0^\tau f_n(s)dsd\tau$$

Другим словами последовательность

$$u_n(t) = tf_n' + f_n^0 + \int_0^t\int_0^\tau f_n(s)dsd\tau, \quad n = 1,2...$$

сходится в $L_2(H,(0,1))$ к функцию $u(t) = tf_n' + f_n^0 + \int_0^t\int_0^\tau f_n(s)dsd\tau$. Ясно, что $u(t) \in D(L_0)$ и $L_0u(t) = f(t)$. Теоремадоказана.

Можно доказатьследуюшую теорему.

Теорема 4. *Если* $\|T_0\| < 1$ *и* $\|T_1\| < 1$, *то оператор* L_0 *ограниченно обратим в* $L_2(H,(0,1))$.

Введем следующие обозначения:

$n = \dim\ker(T_0 - E), \quad n^* = \dim\ker(T_0^* - E),$

$m = \dim\ker(T_1 - E), \quad m^* = \dim\ker(T_1^* - E),$

$\rho = \dim\left[\ker(T_0^* - E) \cap \ker(T_1 - E)\right],$

$q = \dim\left[\ker(T_0^* - E) \cap \ker(T_1 - E)T_1^*\right],$

$q^* = \dim\left[T_1^*(\ker(T_0^* - E) \cap \ker((T_1 - E)T_1^*))\right]$

Теорема 5. *Верна формула*

$$\dim\ker L_0 = n + p.$$

Доказательство. Ядро оператора L_0 состоит из функций $u(t) = tf_1 + f_0$, где

$$(T_0 - E)f_0 = f_1,\ (T_1 - E)f_1 = 0.$$

Для того, чтобы первое вышенаписанные уравнение было разрешимо необходимо выполнение условия

$$(T_0^* - E)f_1 = 0.$$

Через $l_1, l_2, \ldots, l_p$ обозначим линейно независсимых в $\ker(T_0^* - E) \cap \ker(T_1 - E)$, а через $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимых элементов ядра $\ker(T_1 - E)$.

Общее решение уравнения

$$(T_0 - E)x = e_k, \quad k = 1, \ldots, p,$$

имеет вид

$$x = \sum_{e=1}^{n} c_e x_e + \widetilde{x}_k, \quad k = 1,2, \ldots, p,$$

где c_e, $l = 1,2, \ldots, n$, числа и $(T_0 - E)\widetilde{x}_k = l_k$. Элементы $\widetilde{x}_k$ единственны с точностью до слагаемого из $\ker(T_0 - E)$. Действительно, если для одного $l_{\bar{k}}$, $1 \le \bar{k} \le p$, существоваел два элемента $\widetilde{x}_k - u\widetilde{y}_{\bar{k}}$, то имеем

$$(T_0 - E)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l' x_k + \widetilde{x}_{\bar{k}}\right) = 0$$

$$(T_0 - E)\left(\sum_{l=1}^{n} c_l'' x_k + \widetilde{y}_{\bar{k}}\right) = 0,$$

где c_l', c_l'', $l = 1, \ldots, n$, числа. Из последних соотношений следует, что

$(T_0 - E)(\widetilde{x}_{\bar{k}} - \widetilde{y}_{\bar{k}}) = 0$, т.е. $\widetilde{y}_{\bar{k}} = \widetilde{x}_{\bar{k}} + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l x_l$, $\lambda_l, l = 1, \ldots, n$, числа.

Теперь рассмотрим линейное многообразие $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, , \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_p)$, порожденное элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_p$. Докажем, что оно имеет размерность $n+p$.

Наобарот, предположим, что для некоторых чисел $c_i, i = 1,2,..,n, \lambda_i, i = 1,..,p$, где $\sum_{i=1}^{n} |c_i| + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| > 0$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widetilde{x}_i = 0.$$

В последнем соотношением хотя бы для одного индекса i_0, $1 \le i_0 \le p$, $\lambda_{i_0} \ne 0$. В противном случае мы имеем бы $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ чего быть не может. Тогда легко видеть, что

$$(T_0 - E)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widetilde{x}_i\right) = 0,$$

или тоже самое

$$(T_0 - E)\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \widetilde{x}\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i l_i = 0.$$

Последное невозможно. Значит,

$$\dim L(x_1,\ldots,x_n,\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_p) = n + p.$$

С другой стороны, легко видеть, что $\alpha(L_0) = \max\{n = p, p\} = n + p$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует

Следствие 1. *Если* $\ker(T_1 - E) \subset R(T_0 - E)$, *то* $\alpha(L_0) = n + m$;

Теорема 6. *Справедлива следующая формула то*
$\alpha(L_0^*) = \max\{q, m^* + q^*\}$

Доказательство. Ядро оператора L_0^*состоит из функций вида $V(t) = tg_1 + g_0$, где

$$(T_0^* - E)g_1 = 0,$$
$$(T_1^* - E)g_0 = T_1^* g_1,$$

Для разрешимости второго написанного уравнения необходимо, чтобы выполнялось

$$(T_1 \ - E)T_1^* g_1.$$

Итак

$$g_1 \in \ker(T_0^* - E) \cap \ker(T_1 - E)T_1^*))$$

Тогда по вышеуказанной схеме в теореме 5. Можно установить, что

$$\alpha(L_0^*) = \max\{q, m^* + q^*\}$$

Отсюда следует.

Следствие 2. *Если* $T_1^* \ker(T_0^* - E) \cap R(T_1^* - E)$ и $\ker T_1^* = \{0\}$, то

$$\alpha(L_0^*) = \max\{n^*, m^* + n^*\} = n^* + m^*,$$

а если удовлетворяется только одно условие $\ker T_1^* = \{0\}$, *то* $q = q^*$ *и*

$$\alpha(L_0^*) = m^* + q^*$$

2. Можно доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $0 \in \rho(T_0 + T_1)$, *то существует* $\lambda \in C$, *также, что* $R_\lambda(L_0)$ *существует в пространстве* $L_2(H,(0,1))$ т.е. $\rho(L_0) \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения* $p \le \min\{n^*, m\}$, $q \le n^*$, $q^* \le m$;

Итак с помощью этих двух леемма и теоремы нормальной разрешимоти и d- характеристики возмущения [1] можно установить справедливость следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть* T_0, T_1 *линейное ограниченные операторы в* H, $0 \in \rho(T_0 + T_1)$, $(T_1 - E), (T_1 - E)(T_0 - E)$ *нормально разрешимы в* H, *операторы* $(T_0 - E), (T_1 - E)$ *имеют конечные* d-характеристики и

$$A \in \sigma_\infty(L_2(H,(0,1)) \text{ или } A \in \sigma_\infty(H).$$

Тогда оператор L нормально разрешием в $L_2(H,(0,1))$, имеет конечную d-характеристику и

$$\chi(L) = \alpha(L) - \beta(L) = n + p - \max\{q, m^* + q^*\}$$

Если кроме вышеперечисленных условий удовлетворя.тся следующие условия

$$\ker(T_1 - E) \subset R(T_0 - E), \quad T_1^* \ker(T_0^* - E) \subset R(T_1^* - E) \text{ и } T_1^* = \{0\}, \text{ то}$$

$$\chi(L) = (n - n^*) + (m - m^*) = \chi(T_0 - E) + \chi(T_1 - E).$$

Литература

[1]. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейный операторов* УМН, 1957, т.XII, в 2(74), с. 43-118.

[2]. Крейн Г.С. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* Москва, Наука, 1971, 104 с.

[3]. Якубов С.Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения.* Баку, Элм , 1985, 220 с.

[4]. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. *О разрешимости каевых задач для дифференциально-операторных уравнений эллиптического типа* Диф. уравн., 1992, т.28, №4, с. 651-661.

İsmayılov Z.İ. BİR SİNİF İKİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL OPERATORLARINA NORMAL HƏLL OLUNMAQLIĞI VƏ İNDEKSİ HAQQINDA

Məqalədə bir sinif ikinci tərtib diferensial orperatorların sonlu rarçada vektor funksiualarin Hilbert fəzasında normal həll olunmaqlığı və indeksi ilə sərhəd şərtlərindəki operatorların normal həll olunmaqlığı və indeksi arasında əlaqə öyrənilmişdir.

Ismailov Z.I. ON NORMAL SOLVABILITY AND INDEX OF A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS

In a Hilbert spase of vector functions on a finite segment it is investigated a relation between a normal solvatility and index of a second order differential operator with normal solvatilities and indices of operators in boundary conditions.