1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.98

КАРАЕВ М.Т.

ОДНА ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ КРАТНОСТЕЙ СПЕКТРА

Настоящая заметка посвящена поведению кратности спектра при прямом сложении операторов. Изучается степень зависимости слагаемых такой суммы, которая влечет справедливость формулы сложения кратностей.

Кратностью спектра линейного ограниченного оператора A, действующего в банаховом пространстве X, называют следующее число (или символ ∞):

$$\mu(A) = \min\left\{ cardC : C \subset X, Span\left(A^n C : n \geq 0\right) = X \right\}$$

Кратность спектра - важный инвариант оператора, а в некоторых разделах теории операторов и ее приложений он играет ключевую роль. Поведение кратности спектра прямых сумм операторов в зависимости от кратностей спектра слагаемых весьма существенно для понимания этой характеристики вообще (более подробно о кратности спектра прямых сумм операторов см., например, [1-6]).

Пусть $A \oplus B$ обозначает прямую сумму линейных ограниченных операторов A и B действующих, соответственно, в банаховых пространствах X и Y:

$$(A \oplus B)\left(x \oplus y\right) = Ax \oplus By, \quad x \oplus y \in X \oplus Y$$

Хорошо известно, что

$$\max\left(\mu(A), \mu(B)\right) \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B) \qquad (1)$$

Крайние случаи (т.е. случаи, когда одно из неравенств превращается в равенство) особенно интересны. Левое неравенство обращается в равенство, грубо говоря, когда действие операторов A и B совершенно независимо одно от другого, скажем, если спектры $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ хорошо разделены. Например, в [1] доказано, что

$$\mu(A \oplus B) = \max\left(\mu(A), \mu(B)\right),$$

если полиномиально выпуклые оболочки спектров не пересекаются. Здесь мы будем интересоваться тем крайним случаем, когда правое неравенство переходит в равенство

$$\mu(A \oplus B) = \mu(A) \oplus \mu(B) \qquad (2)$$

Ниже мы приведем теорему, показывающую, что если один из операторов A и B "сильнее" другого, то выполняется равенство *(2)*. В основе наших рассуждений лежит некоторое специальное произведение.

Теорема. *Пусть* $X \subset l^1$ *(непрерывное вложение) - банахово пространство с базисом* $\{e_n\}_{n\geq 0}$ *и* $T, Te_n = \lambda_n e_{n+1}, \lambda_n \neq 0, n \geq 0$ *- оператор взвешенного сдвига, непрерывно действующий в* X. *Пусть* Y *- сепарабельное банахово пространство и* K *- линейный ограниченный оператор, действующий в* Y. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $\|e_{n+m}\|_X \leq c\|e_n\|_X \|e_m\|_X$ *для всех* $n, m \geq 0, c > 0$ *-некоторая постоянная.*

2) $\sum_{n,m\geq N} \left|\frac{W_{n+m}}{W_n \cdot W_m}\right| < +\infty$ *для некоторого* $N \geq 0$, *где* $W_n \overset{def}{=} \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$, $W_0 \overset{def}{=} 1$.

3) $\|K^n y\|_Y \leq C_y |W_n|$ *для каждого* $y \in Y, n \geq 0$ *и для некоторого* $C_y > 0$.

Тогда $\mu(T \oplus K) = \mu(T) + \mu(K) = 1 + \mu(K)$.

Доказательство. Для каждого $x = \sum_{n\geq 0} x(n)e_n$, $y = \sum_{n\geq 0} y(n)e_n \in X$ положим

$$x * y \overset{def}{=} \sum_{n,m\geq 0} \frac{W_{n+m}}{W_n \cdot W_m} x(n) y(m) e_{n+m} \qquad (3)$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. X *- банахова алгебра относительно произведения* $*$, *причем с единицей* e_0.

Доказательство. Покажем, что для некоторого $C > 0$

$$\|x * y\|_X \leq C\|x\|_X \|y\|_X \qquad (4)$$

Заметим, что при $N = 0$ нужная оценка *(4)* непосредственно получается из формулы *(3)*. Поэтому, ниже в доказателтстве будем считать, что $N \geq 1$. Обозначим $r_n(x) = \sum_{k\geq n} x(k)e_k$. Тогда

$$x * y = \sum_{n,m\geq 0} \frac{W_{n+m}}{W_n \cdot W_m} x(n)y(m)e_{n+m} =$$

$$= x(0)\sum_{m\geq 0} y(m)e_m + \frac{x(1)}{W_1}\sum_{m\geq 0} y(m)\frac{W_{m+1}}{W_m}e_{m+1} + \frac{x(2)}{W_2}\sum_{m\geq 0} y(m)\frac{W_{m+2}}{W_m}e_{m+2} +$$

$$+\ldots+\frac{x(N-1)}{W_{N-1}}\sum_{m\geq 0} y(m)\frac{W_{m+N-1}}{W_m}e_{m+N-1} + y(0)\sum_{n\geq N} x(n)e_n +$$

$$+\frac{y(1)}{W_1}\sum_{n\geq N} x(n)\frac{W_{n+1}}{W_n}e_{n+1} + \frac{y(2)}{W_2}\sum_{n\geq N} x(n)\frac{W_{n+2}}{W_n}e_{n+2} + \ldots +$$

$$+\frac{y(N-1)}{W_{N-1}}\sum_{n\geq N} x(n)\frac{W_{n+N-1}}{W_n}e_{n+N-1} + \sum_{n\geq N}\sum_{m\geq N}\frac{W_{n+m}}{W_n \cdot W_n} x(n)y(m)e_{n+m} =$$

$$= x(0)y + \frac{x(1)}{W_1}Ty + \frac{x(2)}{W_2}T^2 y + \ldots + \frac{x(n-1)}{W_{N-1}}T^{N-1}y +$$

$$+y(0)r_N(x)+\frac{y(1)}{W_1}r_N(Tx)+\frac{y(2)}{W_2}r_N\left(T^2x\right)+\ldots+$$

$$+\frac{y(N-1)}{W_{N-1}}r_N\left(T^{N-1}x\right)+\sum_{n\ge N}\sum_{m\ge N}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}x(n)y(m)e_{n+m}$$

Используя условия теоремы, отсюда получается оценка *(4)*. Утверждения леммы легко получаются из *(3)* и *(4)*. Лемма 1 доказана.

Из оценки *(4)* ясно, что каждый элемент $x\in X$ определяет ограниченный оператор в X:

$$D_x y\overset{def}{=}x*y,\ y\in X.$$

Лемма 2. *Оператор* D_x *обратим в* $X\Leftrightarrow x(0)\neq 0$.

Доказательство. Включение $\Rightarrow$- очевидно. Действительно, если D_x- обратим, то существует $y\in X$, такой, что $D_xy=x*y=e_0$. Поэтому в силу формулы *(3)* $x(0)y(0)=1$, отсюда $x(0)\neq 0$. Докажем обратное включение. Так как $D_x=D_{x(0)e_0+(x-x(0)e_0)}$ и $e_0*y=y$ для любого $y\in X$, то $D_x=x(0)I+D_{x-x(0)e_0}$. Обозначим $x'=x-x(0)e_0$ и $\bar{x}=[x']^{N+1}=\underbrace{x'*\ldots*x'}_{N+1}$.

Легко убедиться, что $\bar{x}(0)=\bar{x}(1)=\ldots\bar{x}(N)=0$. Поэтому

$$D_{x'}^{N+1}y=[x']^{N+1}*y=\bar{x}*y=y(0)r_{N+1}(x)+\frac{y(1)}{W_1}r_{N+1}(T\bar{x})+$$

$$+\frac{y_2}{W_2}r_{N+1}\left(T^2\bar{x}\right)+\ldots+\frac{y(N)}{W_N}r_{N+1}\left(T^N\bar{x}\right)+$$

$$+\sum_{n\ge N+1}\sum_{m\ge N+1}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}=\sum_{i=0}^{N}\frac{y(i)}{W_i}r_{N+1}\left(T^i\bar{x}\right)+$$

$$+\sum_{n\ge N+1}\sum_{m\ge N+1}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}=\sum_{i=0}^{N}\frac{y(i)}{W_i}r_{N+1}\left(T^i\bar{x}\right)+$$

$$\sum_{n=N+1}^{M}\sum_{m=N+1}^{M}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}+\sum_{n=N+1}^{M}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}+$$

$$+\sum_{n=M+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}$$

Через K_M обозначим следующий оператор:

$$K_My=\sum_{i=0}^{N}\frac{y(i)}{W_i}r_{N+1}\left(T^i\bar{x}\right)+\sum_{n=N+1}^{M}\sum_{m=N+1}^{M}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}$$

Ясно, что K_M-конечномерный оператор. Учитывая условия 1), 2) теоремы получим:

$$\left\|D_{x'}^{N+1}-K_M\right\|_{L(X)}=\sup_{\|y\|\le 1}\left\|D_{x'}^{N+1}y-K_My\right\|=$$

$$= \sup_{\|y\|\le 1}\left\|\sum_{n=N+1}^{M}\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=M+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\bar{x}(n)y(m)e_{n+m}\right\|\le$$

$$\le c\left(\sum_{n=N+1}^{M}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left|\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\right|+\sum_{n=M+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\left|\frac{W_{n+m}}{W_n\cdot W_m}\right|\right)\to 0 \quad при\ M\to\infty$$

Следовательно,

$$\left\|D_{x'}^{N+1}-K_M\right\|_{L(x)}\to 0 \quad при\ M\to+\infty,$$

то есть, $D_{x'}^{N+1}$- компактный оператор в X. Нетрудно проверить, что $\ker\left(x(0)I+D_{x'}\right)=\{\mathbf{0}\}$. Поэтому, в силу известной теоремы (см., [17]) D_x является обратимым оператором в пространстве X. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Элемент $x\in X$ является циклическим вектором для оператора T (т.е. $E_x \overset{def}{=} Span\left(T^n x: n\ge 0\right)=X$) тогда и только тогда, когда* $x(0)\neq 0$.

Доказательство. Из *(3)* ясно, что

$$W_1e_1*y=W_1e_1*\sum_{n\ge 0}y(y)e_n=\sum_{n\ge 0}y(n)W_1\left(e_1*e_n\right)=$$

$$=\sum_{n\ge 0}y(n)W_1\frac{W_{n+1}}{W_1\cdot W_n}e_{n+1}=\sum_{n\ge 0}y(n)\frac{W_{n+1}}{W_n}e_{n+1}=\sum_{n\ge 0}y(n)\lambda_n e_{n+1}=$$

$$=\sum_{n\ge 0}y(n)Te_n=T\left(\sum_{n\ge 0}y(n)e_n\right)=Ty,$$

т.е., $Ty=W_1e_1*y$ для любого $y\in X$, и вообще,

$$T^n y=W_ne_n*y,\quad y\in X \tag{5}$$

Учитывая это получим:

$$E_x=Span\left(T^n x: n\ge 0\right)=Span\left(W_ne_n*x: n\ge 0\right)=$$

$$=Span\left(D_x\left(W_ne_n\right): n\ge 0\right)=closD_xX$$

Итак,

$$E_x=closD_xX \tag{6}$$

Поэтому, если x - циклический вектор для оператора T, то $closD_xX=X$. Поэтому, существует $x_n\in X$ такой, что $x*x_n\to e_0(n\to\infty)$ в X. Отсюда следует, что $\left(x*x_n\right)(0)\to 1(n\to\infty)$, или $x(0)x_n(0)\to 1(n\to\infty)$, и поэтому, $x(0)\neq 0$. Наоборот, если $x(0)\neq 0$, то в силу *(6)* и Леммы 2 ясно, что $E_x=X$, то есть, x - циклический вектор для T. Лемма 3 доказана.

Теперь, приступим к доказательству теоремы. В случае $\mu(K)=+\infty$ доказательство теоремы очевидно, и поэтому, будем считать, что $\mu(K)=n<+\infty$. В силу Леммы3 $\mu(T)=1$. Допустим, что

$\mu(T \oplus K) = \mu(K) = n$. Пусть $\left\{x_i \oplus y_i\right\}_{i=1}^{n}$ - циклический набор векторов для оператора $T \oplus K$. Тогда $\left\{x_i\right\}_{i=1}^{n}$ - циклический набор для T. Поэтому, существует номер $i_0, 1 \le i_0 \le n$, такой, что $x_{i_0}(0) \ne 0$. Будем считать, что $i_0 = 1$, т.е., $x_1(0) \ne 0$. Тогда в силу Леммы 2 оператор D_x - обратим в X. Поэтому, существует $\widetilde{x} \in X$ такой, что $x * \widetilde{x} = e_0$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{x} & & & & \\ -x_2 * \widetilde{x} & e_0 & & \mathbf{0} & \\ -x_3 * \widetilde{x} & \mathbf{0} & e_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -x_n * \widetilde{x} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & e_0 \end{pmatrix}$$

Так как $(* - \det A)(0) = \widetilde{x}(0) \ne 0$, то A является $*$ - обратимой матрицей из $\left[X^n \to X^n\right]$, где $X^n = X \times \ldots \times X$.

Учитывая, что

$$A * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

легко убедиться, что $\left\{e_0 \oplus \overline{y}_1, \mathbf{0} \oplus \overline{y}_2, \ldots, \mathbf{0} \oplus \overline{y}_n\right\}$ - новый циклический набор для оператора $T \oplus K$. Поэтому, если $y \in Y$ - произвольный элемент, то существует семейство векторных полиномов $\left\{P_{m,i}\right\}_{i=1}^{n}$ такое, что

$$\lim_m P_{m,1}(T) e_0 = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad X$$

$$\lim_m \sum_{i=1}^{n} P_{m,i}(K) \overline{y}_i = y \quad \text{в} \quad Y$$

Отсюда в силу равенства *(5)* получим, что

$$\lim_m q_{m,1} = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad X,$$

где $q_{m,1} \overset{def}{=} \sum_{k \ge 0} W_k P_{m,1}(k) e_k$. Теперь, используя условие 3) теоремы получим:

$$\left\|P_{m,1}(K)\overline{y}_1\right\| = \left\|\sum_{k \ge 0} P_{m,1}(k) K^k \overline{y}_1\right\| \le \sum_{k \ge 0} \left|P_{m,1}(k)\right| \left\|K^k \overline{y}_1\right\| =$$

$$= \sum_{k \ge 0} \left|W_k\right| \left|P_{m,1}(k)\right| \frac{\left\|K^k \overline{y}_1\right\|}{\left|W_k\right|} \le C_{\overline{y}_1} \sum_{k \ge 0} \left|q_{m,1}(k)\right| =$$

$$= C_{\overline{y}_1} \left\|q_{m,1}\right\|_{l^1} \le \widetilde{C}_{\overline{y}_1} \left\|q_{m,1}\right\|_X \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Следовательно,

$$\lim_{m} \sum_{i=2}^{n} P_{m,i}(K)\bar{y}_i = y,$$

но так, как y- призвольно, это означает, что $\{\bar{y}_i\}_{i=2}^{n}$ -циклический набор для оператора K, и стало быть, $\mu(K) \le n-1$. Но это невозможно, поскольку по условию $\mu(K) = n$. Теорема доказана.

Литература

[1]. Никольский Н.К. *Наброски к вычислению кратности спектра ортогональных сумм.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, т.126, с.150-158.

[2]. Vasyunin V.I., Karaev M.T. *The multiplicity of some contractions.* J. Sov. Math., 1989, v.44,6, p.762-767.

[3]. Nikolski N.K. *Multiplicity phenomenon. I. An introduction and maxi-formulas.* Oper. Theory: Advances and Applications., 1989, v.42, p.9-57.

[4]. Vasynin V.I. *Formula for multiplicity of contractions with finite defect indices.* Oper. Theory: Advances and Applications., 1989, v.42, p.281-304.

[5]. Караев М.Т. *О кратности спектра ортогональных сумм операторов.* Спектральная теория операторов и ее приложения., Баку: "Элм", 1991, вып.10, с.165-167.

[6]. Караев М.Т. *Сложение кратностей спектра и инвариантные подпространства.* Диссертация, Баку, 1991, 123 с.

[7]. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977, 741 с.

Qarayev M.T. SPEKTRİN TƏRTİBLƏRİNİN TOPLANMASI HAQQINDA BİR TEOREM

Banax fəzalarında çəkili sürüşdürmə operatoru və məhdud operatorun düz cəminə baxılır. Bəzi tabelilik şərti daxilində belə cəm üçün spektrin tərtiblərinin toplanması düsturu isbat edilmişdir.

Karaev M.T. **AN ADDITION THEOREM OF MULTIPLICITIES OF SPECTRUM**

The direct sum of weighted shift operator and bounded operator in Banach spaces is considered. Under some subordination condition for a such sum the addition formula for multiplicities is proved.