1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.972.6+514.86

ЛЕОНОВ К.Я.

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДВУМЕРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В данной статье рассмотрены три пары сопряженных потенциалов двумерных экстремальных многообразий (определение см. ниже). Знание различных потеницалов дает возможность описывать многообразия с помощью различного вида дифференциальных уравнений, что, например, является решающим моментом при нахождении точных решений уравнений. Необходимость знания различных потенциалов, и дифференциальных уравнений для них, при решении прикладных вопросов обусловлена тем, что постановка краевых условий (в краевых и начально-краевых задачах) в различных моделях и в различных физических ситуациях наиболее естественно формулируется в терминах определенных (естественных для данной ситуации) потенциалов.

Двумерные многообразия в трехмерном конфигурационном пространстве с координатами (x^1, x^2, x^3), доставляющие экстремум функционалу

$$A = \int_S P_{12}(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 +$$
$$+ P_{13}(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^3 + P_{23}(x^1, x^2, x^3) dx^2 \wedge dx^3 \qquad (1)$$

при заданной зависимости $P_{12} = P_{12}(P_{13}, P_{23})$, где P_{13} и P_{23} считаются независимыми между собой, описываются системой вариационных уравнений в дифференциалах координат фазового пространства

$$\begin{cases} dP_{23} \wedge dx^2 + dP_{13} \wedge dx^1 = 0 \\ dx^1 \wedge dx^3 + \dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{13}} dx^1 \wedge dx^2 = 0 \\ dx^2 \wedge dx^3 + \dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{23}} dx^1 \wedge dx^2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

или ее следствием (дифференциальным)

$$\begin{cases} dP_{23} \wedge dx^2 + dP_{13} \wedge dx^1 = 0 \\ d\left(\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{13}}\right) \wedge dx^2 - d\left(\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{23}}\right) \wedge dx^1 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(более подробное изложение этих вопросов см. в [1]). Зависимость $P_{12} = P_{12}(P_{13}, P_{23})$ определяет поверхность в фазовом пространстве - детерминантную поверхность модели, которую будем считать неразвертывающейся, т.е. гессиан функции $P_{12} = P_{12}(P_{13}, P_{23})$ должен быть отличен от нуля.

Замечание 1. *Основное преимущество (в особенности при исследовании вопроса о потенциалах) системы уравнений (3) перед системой (2) состоит в том, что система (3) полностью состоит из точных 2-форм.*

Примеры моделей: 1) Модель адиабатических течений политропных газов: функционал A-действие; координаты конфигурационного пространства (t, ξ, x), где t - время, ξ - лагранжевая координата элемента газа, x - координата пространства наблюдателя; $P_{12} \equiv h$ - плотность полной энтальпии (содержащую кинетическую энергию движения элемента газа); $P_{13} = (-P)$, где P - давление $(P > 0)$; $P_{23} \equiv q$ - плотность импульса; уравнение детерминантной поверхности

$$h = \frac{1}{2\rho_0} q^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} B P_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

(γ - коэффиц. Пуассона, $\gamma > 1$)

2) Модель динамики упругого стержня (продольные адиабатические деформации): механический смысл функционала A и координат конфигурационного пространства тотже, что в примере 1); $P_{12} \equiv h$ - плотность полной энтальпии; $P_{13} \equiv \sigma$ - напряжение; $P_{23} \equiv q$ - плотность импульса; уравнение детерминантной поверхности

$$h \equiv \frac{1}{2\rho_0} q^2 - \sigma_0 \varphi \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right), \quad (\sigma_0 \varphi''(\cdot) > 0)$$

При $\sigma_0 = E$, где E - модуль Юнга, и $\varphi(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)^2$ получаем модель динамики линейно-упругого стержня.

3) Модель минимальных поверхностей: функционал A - площадь поверхности; (x^1, x^2, x^3) - координаты трехмерного пространства вмещающего двумерную поверхность; существуют системы координат в которых P_{ij} - имеют смысл косинусов углов наклона касательной плоскости поверхности к координатной плоскости (x^i, x^j); уравнение детерминантной поверхности в этих системах координат имеет вид

$$P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{23}^2 = 1 \qquad (*)$$

4) Модель, экстремальные многообразия которой описываются гармоническими функциями: эта модель является линеаризованной моделью 3) и имеет следующее уравнение детерминантной поверхности

$$P_{12}=\frac{1}{2}\left(P_{13}^2+P_{23}^2\right)$$

которое, с точностью до аддитивной постоянной, совпадает с первыми двумя членами разложения (в окрестности точки $P_{13}=P_{23}=0$) функции $P_{12}=\sqrt{1-P_{13}^2-P_{23}^2}$, полученной из *(*)*.

Система уравнений *(3)* особенно популярна в газодинамике. В процессе получения точных решений уравннеий газодинамики приходят к необходимости использования других искомых функций (потенциалов), которые должны быть решениями или линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами или решениями уравннеий Монжа-Ампера [2]- [8]. При описании динамики упругого стержня чаще всего используют в качестве искомой функции координату пространства наблюдателя $x=x(\xi,t)$, которая должна быть решением соответствующего дифференциального уравнения второоого порядка. При описании минимальных поверхностей и гармонических функций. Используют, в качестве искомых функций, как функции $x^3=x^3(x^1,x^2)$, являющихся решениями уравнений второго порядка, так и пары функций (вещественные и мнимые части комплексных потенциалов) являющихся решениями системы уравнений Коши-Римана [9].

Описание экстремальных многообразий с помощью системы 2-форм *(3)* позволяет: 1) охватить все множество потенциалов и выяснить, что это множество естественным образом разбивается на пары (для двумерных многообразий), сопряженных между собой, потенциалов; 2) легко находить системы уравнений первого порядка для этих пар потенциалов (обобщение системы уравнений Коши-Римана), и уравнения второго порядка для каждого из потенциалов; 3) легко выписывать формулы связывающие различные пары сопряженных потенциалов.

Для упрощения записи символы $\left(x^1,x^2,x^3,P_{12},P_{13},P_{23}\right)$ будем обозначать соответственно через $\left(t,\xi,x,h,(-p),q\right)$, используемые в газодинамической модели 1) (не учитывая при этом, *естественно, никакой* специфики этой модели). В принятых обозначениях, система уравнений *(3)* запишется так

$$\begin{cases} dq\wedge d\xi-dp\wedge dt=0 \\ d\left(h_p\right)\wedge d\xi+d\left(h_q\right)\wedge dt=0 \end{cases}\qquad (4)$$

Замечание 2. *Для рассматриваемых в данной статье вопросов несущественно различие между гиперболическими* $\left(h_{pq}^2-h_{pp}h_{qq}>0\right)$ *и эллиптическими* $\left(h_{pq}^2-h_{pp}h_{qq}<0\right)$ *моделями.*

Рассмотрим экстремальные многообразия имеющие однозначную проекцию (в выбранной системе координат) на плоскость $\left(x^1,x^2\right)\equiv(t,\xi)$ (в моделях динамики сплошной среды рассматриваются только такие многообразия, которые однозначно проектируются на плоскости (t,ξ) и (t,x)). Далее, в силу предпологаемой (до процесса варьирования) независимости величин $(P_{13},P_{23})\equiv(-p,q)$, экстремальные многообразия описывающиеся системой уравнений *(3),* также будут однозначно проектируемы на плоскость (p,q). Для этих многообразий рассмотрим две системы 1-форм.

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}_1 = qd\xi - pdt\\ \tilde{\alpha}_2 = h_p d\xi + h_q dt\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\tilde{\beta}_1 = \xi dq - tdp\\ \tilde{\beta}_2 = \left(\xi h_{pq} + th_{qq}\right)dq + \left(\xi h_{pp} + th_{pq}\right)dp\end{cases} \tag{6}$$

которые связаны между собой следующим образом

$$\tilde{\alpha}_1 = d(q\xi - pt) - \tilde{\beta}_1,\quad \tilde{\alpha}_2 = d\left(\xi h_p + th_q\right) - \tilde{\beta}_2$$

Рассмотрим ссужения 1-форм $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2$ на экстремальные многообразия, т.е. на те двумерные многообразия, на которых анулируются дифференциалы этих форм. Так как на этих многообразиях рассматриваемые 1-формы являются замкнутыми то на односвязных и гладких многообразиях эти 1-формы будут точными (по лемме А.Пуанкаре). Следовательно, существуют числовые функции $\{\Phi_1(\xi,t),\Phi_2(\xi,t)\}$ и $\{F_1(q,p),F_2(q,p)\}$ такие, что

$$\begin{cases}d\Phi_1 = \tilde{\alpha}_1 = qd\xi - pdt\\ d\Phi_2 = \tilde{\alpha}_2 = h_p d\xi + h_q dt\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}dF_1 = \tilde{\beta}_1 = \xi dq - tdp\\ dF_2 = \tilde{\beta}_2 = \left(\xi h_{pq} + th_{qq}\right)dq + \left(\xi h_{pp} + th_{pq}\right)dp\end{cases} \tag{8}$$

Эти числовые функции называются потенциалами экстремальных многообразий. Полученные две пары потенциалов связаны между собой следующими равенствами

$$\begin{aligned}\Phi_1(\xi,t) &= (\xi q - tp) - F_1(q,p),\\ \Phi_2(\xi,t) &= \left(\xi h_p + th_q\right) - F_2(q,p)\end{aligned} \tag{9}$$

которые выполняются с точностью до произвольных аддитивных постоянных. Для выражения переменных (ξ,t) и (q,p) друг через друга, следует использовать равенства

$$\begin{cases}\Phi_{1,\xi}(\xi,t) = q\\ \Phi_{1,t}(\xi,t) = -p\end{cases},\quad \begin{cases}F_{1,q}(q,p) = \xi\\ F_{1,p}(q,p) = -t\end{cases} \tag{10}$$

или

$$\begin{cases}\Phi_{2,\xi}(\xi,t)=h_p\\ \Phi_{2,t}(\xi,t)=h_q\end{cases},\quad \begin{cases}F_{2,q}(q,p)=\xi h_{pq}+th_{qq}\\ F_{2,p}(q,p)=\xi h_{pp}+th_{pq}\end{cases} \tag{11}$$

которые следуют из равенств *(7)* и *(8)*.

Из первых систем равенств в *(10)* и *(11)* следует система уравнений первого порядка для пары сопряженных потенциалов $\{\Phi_1(\xi,t),\Phi_2(\xi,t)\}$.

$$\begin{cases}\Phi_{2,\xi}=h_p\left(\Phi_{1,\xi},(-\Phi_{1,t})\right)\\ \Phi_{2,t}=h_q\left(\Phi_{1,\xi},(-\Phi_{1,t})\right)\end{cases} \tag{12}$$

Систему уравнений *(12)* естественно назвать системой обобщенных уравнений Коши-Римана т.к. при $h=\frac{1}{2}\left(q^2+p^2\right)$ (см. модель 4) она является классической системой уравнений Коши-Римана.

Из системы уравнений *(12)* легко получить уравнеие второго порядка для потенциала $\Phi_1(\xi,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}h_p\left(\Phi_{1,\xi},(-\Phi_{1,t})\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}h_q\left(\Phi_{1,\xi},(-\Phi_{1,t})\right)$$

Чтобы получить уравнение для $\Phi_2(\xi,t)$ необходимо в системе *(12)* выразить $\left(\Phi_{1,\xi},\Phi_{1,t}\right)$ через $\left(\Phi_{2,\xi},\Phi_{2,t}\right)$, что осуществимо т.к., по предполжению, $h_{pq}^2-h_{pp}h_{qq}\neq 0$.

Найдем теперь уравнения которым должны удовлетворять потенциалы $F_1(q,p)$ и $F_2(q,p)$. Из вторых систем равенств в *(10)* и *(11)*, получаем

$$\begin{cases}F_{2,q}=h_{pq}F_{1,q}-h_{qq}F_{1,p}\\ F_{2,p}=h_{pp}F_{1,q}-h_{pq}F_{1,p}\end{cases} \tag{13}$$

Эта система уравнений является системой обобщенных уравнений Коши-Римана в плоскостных координатах (или на плоскости годографа). Система уравнений *(13)* линейна если функция $h(q,p)$ не зависит *явно от координат* конфигурационного пространства. Ее можно записать с помощью скобок Пуассона

$$\begin{cases}F_{2,q}=\left[h_q,F_1\right]_{p,q}\\ F_{2,p}=\left[h_p,F_1\right]_{p,q}\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}F_{1,q}=\dfrac{1}{H}\left[h_q,F_2\right]_{p,q}\\ F_{1,p}=\dfrac{1}{H}\left[h_p,F_2\right]_{p,q}\end{cases}$$

где $[\varphi,\eta]_{p,q}\equiv\varphi_p\eta_q-\varphi_q\eta_p$, а $H\equiv\left(h_{pq}^2-h_{pp}h_{qq}\right)$ - гессиан функции $h=h(q,p)$.

Из системы уравнений *(13)* получается уравнение для функции $F_1(q,p)$

$$h_{pp}F_{1,qq}+h_{qq}F_{1,pp}-2h_{pq}F_{1,pq}=0 \tag{14}$$

Если найдено какое-нибудь решение уравнения *(14)*, то подставляя его во вторую систему равенств *(10)* и обращая ее, получим соответствующее решение системы *(4)* $q = q(\xi,t)$, $p = p(\xi,t)$. Отметим, что функции $h(q,p)$ и $F_1(q,p)$ входят в уравнение *(14)* совершенно симметрично. Из этого следует, что экстремальное многообразие, описываемое конкретной функцией $F_1(q,p)$, будет экстремальным для всех моделей, у которых определяющая функция $h = h(q,p)$ является решением уравнения *(14)*, при заданной $F_1(q,p)$.

Рассматривая связь потенциалов $\{\Phi_1,\Phi_2\}$ с потенциалами $\{F_1,F_2\}$, обнаруживаем интересное обобщение преобразования Лежандра. Действительно, из *(9)* и *(10)*, имеем

$$\Phi_1(\xi,t) = \xi q - tp - F_1(q,p) = qF_{1,q} + pF_{1,q} - F_1(q,p) \qquad (15)$$

Аналогично, из *(9)* и второй системы равенств *(11)*, получаем

$$\Phi_2(\xi,t) = \xi h_p + th_q - F_2(q,p) =$$

$$= \frac{1}{H}\left(h_p h_{pq} - h_q h_{pp}\right)F_{2,q} + \frac{1}{H}\left(h_q h_{pq} - h_p h_{qq}\right)F_{2,p} - F_2(q,p) \qquad (16)$$

Связь выражаемая равенством *(15)* есть обычное преобразование Лежандра функции $F_1(q,p)$ в функцию $\Phi_1(q,p)$, а связь *(16)* является обобщенным преобразованием Лежандра, определяемым функцией $h(q,p)$. При $h(q,p) = aq^2 + bp^2$, где $\underline{a}$ и $\underline{b}$ произвольные постоянные, получается обычное преобразование Лежандра. Этим свойством обладают все функции $h(q,p)$, удовлетворяющие уравнению $h_p = W\left(\frac{q}{p}\right)h_q$, где $W(\cdot)$ - произвольная гладкая функция.

В рассмотренном выше множестве экстримальных многообразий выделим многообразия (или части их), которые имеют однозначную проекцию на плоскость (ξ,p). В этом случае координаты (ξ,p) можно выбрать за независимые переменные и рассмотреть следующую систему 1-форм

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_1 = qd\xi + tdp \\ \tilde{\gamma}_2 = h_p d\xi - td(h_q) = \left(h_p - th_{qq}q_\xi\right)d\xi - t\left(h_{pq} + h_{qq}q_p\right)dp \end{cases} \qquad (17)$$

Рассуждая также, как при получении потенциалов $\{\Phi_1,\Phi_2\}$, придем (на односвязных и гладких многообразиях) к существованию числовых функций $\psi_1(\xi,p), \psi_2(\xi,p)$, для которых

$$d\psi_1(\xi,p) = \tilde{\gamma}_1 = qd\xi + tdp,$$

$$d\psi_2(\xi,p) = \tilde{\gamma}_2 = \left(h_p - th_{qq}q_\xi\right)d\xi - t\left(h_{pq} + h_{qq}q_p\right)dp$$

откуда получаем следующие равенства

$$\begin{cases} \psi_{1,\xi} = q \\ \psi_{1,p} = t \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_{2,\xi} = h_p - th_{qq}q_\xi \\ \psi_{2,p} = -t\left(h_{qp} + h_{qq}q_p\right) \end{cases} \qquad (18)$$

Используя систему равенств *(18)*, легко выписать системы уравнений как для функций $\{\psi_1(\xi,p),\, \psi_2(\xi,p)\}$, так и для функций $\{q(\xi,p),\, t(\xi,p)\}$

$$\begin{cases} \psi_{2,\xi} = -\psi_{1,p}h_{qq}\left(\psi_{1,\xi},p\right)\psi_{1,\xi\xi} + h_p\left(\psi_{1,\xi},p\right) \\ \psi_{2,p} = -\psi_{1,p}\left[h_{pq}\left(\psi_{1,\xi},p\right) + h_{qq}\left(\psi_{1,\xi},p\right)\psi_{1,\xi p}\right] \end{cases} \qquad (19)$$

$$\begin{cases} q_p - t_\xi = 0 \\ h_{qq}\left(t_p q_\xi - t_\xi q_p\right) - h_{pq}\left(q_p + t_\xi\right) - h_{pp} = 0 \end{cases} \qquad (20)$$

Из системы уравнений *(19)* получаем уравнение для потенциала $\psi_1(\xi,p)$

$$h_{qq}\left(\psi_{1,\xi},p\right)\left(\psi_{1,p\xi}^2 - \psi_{1,pp}\psi_{1,\xi\xi}\right) +$$
$$+ 2\psi_{1,p\xi}h_{pq}\left(\psi_{1,\xi},p\right) + h_{pp}\left(\psi_{1,\xi},p\right) = 0 \qquad (21)$$

При условиях $h_{pq} \equiv 0, h_{qq} = c - const$, которые выполняются почти во всех, известных автору, моделях динамики сплошных сред, системы уравнений *(19)* и *(20)* упрощаются и принимают следующий вид

$$\begin{cases} \psi_{2,\xi} = -c\psi_{1,p}\psi_{1,\xi\xi} + h_p(p) \\ \psi_{2,p} = -c\psi_{1,p}\psi_{1,\xi p} \end{cases}, \quad \begin{cases} q_p - t_\xi = 0 \\ c\left(t_p q_\xi - t_\xi q_p\right) = h_{pp}(p) \end{cases}$$

а уравнение *(21)* становится простейшим уравнением Монжа-Ампера

$$c\left(\psi_{1,p\xi}^2 - \psi_{1,pp}\psi_{1,\xi\xi}\right) + h_{pp}(p) = 0 \qquad (22)$$

Замечание 3. *Вхождение вторых производных функции $h(q,p)$ в свободный и младшие члены уравнений (21), (22) объясняет "странное" свойство зависимости типа уравнений Монжа-Ампера от этих членов.*

Без особых трудностей устанавливается связь потенциалов $\{\psi_1(\xi,p),\psi_2(\xi,p)\}$ с другими парами потенциалв. Например, связь с парой потенциалов $\{\Phi_1(\xi,p),\Phi_2(\xi,p)\}$

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi,t) = \psi_1(\xi,p) - p\psi_{1,p}(\xi,p) \\ \Phi_2(\xi,t) - t\Phi_{2,t}(\xi,t) = \psi_2(\xi,p) \end{cases}$$

Выше рассматривались только три пары сопряженных потенциалов экстремальных многообразий. Существуют еще три пары потенциалов экстремальных многообразий, имеющих однозначную проекцию, соответственно, на плоскости $(\xi,q),(t,p),(\xi,p)$ в фазовом пространстве.

Литература

[1]. Леонов К.Я. *Параметрическкая форма гамильтоновых систем уравнений двумерных многообразий.*// Труды ИММ АН Азерб. 1997, т.VI(XIV), с.98-102.

[2]. Риман Б. *Сочинения.* Гостехиздат, М.-Л., 1948.

[3]. Курант Р., Фридрихс К. *Сверхзвуковое течение и ударные волны.* М., ИЛ,1950.

[4]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1988.

[5]. Станюкович К.П. *Неустановившиеся движения сплошной среды.* М.: Наука, 1971.

[6]. Martin M.H. *The Monge-Ampere partial differential equation* $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$. // Pacif. J. Math., 1953,v.3, p. 37-39.

[7]. Ludford C.S. *Generalized Rieman invariats.*// Pacif. J. Math., 1955,v.5, p. 441-450.

[8]. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений.* М.: Наука, 1978.

[9]. Курант Р. *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности.* М., ИЛ, 1953.

Leonov K.Ya.

İKİ ÖLÇÜLÜ EKSTREMAL ÇOXOBRAZLILARIN POTENSİALLARI HAQQINDA

İki ölçülü rabitəli ekstremal çoxobrazlıların təsvirinə yol açan üç cüt qoşma potensiallara baxılmışdır. Bu cütlər üçün bir tərtibli tənliklər sistemi (Koşi-Riman sisteminin ümumiləşməsi) və potensialların hər birisi üçün iki tərtibli tənlik çıxarılmışdır. Potensiallar arasındakı əlaqəni ğöstərən düsturlar (Lecandr düstürun ümumiləşdirilməsi) tapılmışdır. Tətbiqlər: ideal qazların bir ölçülü axını, elastik çubuğun dinamikası, minimal səthlər.

Leonov C.Ja.

ABOUT POTENTIALS OF TWO-DIMENTIONAL EXTREMAL MANIFOLDS

Three pairs of congugate potentials have considerated; with their aid it can be described two-dimensional, one-connected, extremal manifolds. The systems of equations of one order for these pairs potentials have received (the generalization of Couhy-Riemann's equations) and equations of the second order for every potentials. The formulas of connections of these potentials have extracted, in wich found natural generalization of Legendre's transformation. Applications: one-dimensional flows of ideal gases, dynamics of elastic pivot, minimal surfaces.