УДК 517.5

**АЛИЕВ Р.М.**

# ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НА МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ty \equiv y^{(2r)} - \lambda \sum_{k=0}^{2r-2} a_k(x) y^{(k)} = f(x) \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$y^{(\sigma_i)}(0) = y^{(\gamma_i)}(1) = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,r) \qquad (2)$$

и квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 y_n(x)dx + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2r-2} A_k^{(l)}\left[y^{(l)}(x_k) - y_n^{(l)}(x_k)\right] + R_{nN}(y)\,, \qquad (3)$$

где $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, $\gamma_i < \gamma_{i+1}$, $\gamma_1 \in \{0,1,\dots,2r-1\}$, $(i = 1,2,\dots,r)$, $y(x)$- точное решение краевой задачи $\{(1), (2)\}$, $y_n(x)$-приближенное решение краевой задачи $\{(1), (2)\}$, $0 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} \le 1$, $N$, $n$ и $r$ -фиксированные натуральные числа.

Классом $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$ обозначим множество решений $y(x)$ краевой задачи $\{(1), (2)\}$, для которых $a_k(x) \in C(0,1)$ $(k = 0,1,\dots,2r-2)$, $f(x) \in C(0,1)$, снабженное нормой

$$\left\| y^{(2r)}(x) \right\|_{L_{2,p}} = \left( \int_0^1 p(x) \left| y^{(2r)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \le M_{2r}\,,$$

где $p(x)$-весовая функция.

В работе решается следующая экстремальная задача: *среди всех квадратурных формул вида (3) найти такую, чтобы величина верхней грани*

$$\sup_{y \in A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}} \left| R_{nN}(y) \right|,$$

распространенной на все функции $y(x)$ класса $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$, была наименьшей.

Найденная квадратурная формула называется наилучшей квадратурной формулой (НКФ) для класса $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$ среди всевозможных квадратурных формул вида *(3)*

Величина

$$\varepsilon_{nN}\left[A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}\right] = \inf_{x_k, A_k^{(l)}} \sup_{y \in A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}} \left| R_{nN}(y) \right| \qquad (4)$$

называется точной оценкой погрешности формулы *(1)* для класса $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$.

Впервые С.М. Никольский в классической работе [1] разработал метод для нахождения НКФ вида

$$\int_0^1 y(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{\rho} A_k^{(l)} y^{(l)}(x_k) + R_N(f), \qquad (5)$$

где $\rho$ и $N$ - фиксированные натуральные числа, для некоторых классов дифференцируемых функций при $\rho = 0$ и $\rho = r-2$.

Существенные результаты по экстремальным задачам получены Н.П. Корнейчуком и его учениками (см. добавление [2]), при $\rho = 0$ А.А. Женсыкбаевым, В.П. Моторным, Б.Д. Бояновым (см. §Д.4, п.1,2 [2]), И.И. Ибрагимовым и Р.М. Алиевым [3]. В [4] построены НКФ вида *(5)* при любом значении $\rho < r-2$ для некоторых классов дифференцируемых функций.

В работе [5] найдена наилучшая по порядку квадратурная формула вида *(3)* на множествах решений краевой задачи $\{(1), (2)\}$.

В этой статье найдена НКФ вида *(3)* для класса $A_{gT}^{(2r)} W_{L_{2,p}}$.

Пусть $\{\omega_n(x)\}$ - система ортогональных алгебраических многочленов относительно веса $p(x)$ на отрезке $[0,1]$, где $p(x)$- неотрицательная суммируемая функция на $[0,1]$, такая, что

$$1/p(x) \le M \qquad (0 \le x \le 1).$$

В качестве узлов интерполяции выберем точки

$$t_{0n}, t_{1n}, \ldots, t_{nn} \qquad (6)$$

- нули многочлена $\omega_n(x)$.

Пусть известны функции $u_{kn}(x)$, являющиеся решениями уравнения

$$u_{kn}^{(2r)}(x) = l_{kn}(x) \qquad (k = 0,1,\ldots,n) \qquad (7)$$

при краевых условиях *(2)*, где

$$l_{kn}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - t_{kn})\omega_n'(t_{tk})} \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$$

фундаментальные полиномы Лагранжа,

$$\omega_n(x) = (x - t_{0n})(x - t_{1n})\ldots(x - t_{nn}).$$

Приближенное решение $y_n(x)$ краевой задачи $\{(1), (2)\}$ разыскиваем в виде

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y^{(2r)}(t_{kn}) u_{kn}(x). \qquad (8)$$

Введем следующие условия:

А. Дифференциальное выражение $y^{(2r)}(x)$ при краевых условиях *(2)* имеет функцию Грина $G(x,t)$.

Б. Краевые условия *(2)* являются самосопряженными.

В. $\lambda$ не является собственным значением краевой задачи $\{(1), (2)\}$.

**Теорема.** *Пусть:*

1) *выполнены условия А, Б и В;*
2) *в качестве узлов интерполяции выбраны точки (6);*

3) *приближенные решения краевой задачи* $\{(1), (2)\}$ *определяются по формуле (8).*

*Тогда среди всевозможных квадратурных формул вида (3) для класса* $A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}$ *существует единственная НКФ, определяемая коэффициентами*

$$A_k^{(2i+1)}=0 \quad (i=0,1,\ldots,r-2;\ k=0,1,\ldots,N-2)$$

$$A_k^{(2i)}=\frac{2h^{2i+1}}{(2r)!}L_{2r}^{(2r-2i-1)}(1) \quad (i=0,1,\ldots,r-1;\ k=0,1,\ldots,N-2)$$

$$(-1)^l A_0=A_{N-1}^{(l)}=\frac{h^{l+1}}{(2r)!}\left\{\frac{(2r)!}{(l+1)!}\left[L_{2r}(1)\right]^{\frac{l+1}{2r}}+(-1)^l L_{2r}^{(2r-l-1)}(1)\right\}$$

$$l=(0,1,\ldots,2r-2) \tag{9}$$

*и узлами*

$$x_k=\left(2k+\sqrt[2r]{L_{2r}(1)}\right)\omega_N\,, \qquad (k=0,1,\ldots,N-1) \tag{10}$$

*При этом*

$$\varepsilon_{nN}\left[A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}\right]=\frac{2\left(M\cdot\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2}\cdot L_{2r}(1)}{(2r)!(4r+1)^{1/2}}\cdot E_n\cdot\omega_N^{2r}\,, \tag{11}$$

*где* $h=\omega_N=\left[2\left(N-1+\sqrt[2r]{L_{2r}(1)}\right)\right]^{-1}$, $L_{2r}(x)$*-многочлен Лежандра степени* $2r$, *со старшим коэффициентом, равным единице,*

$$E_n=\sup_{y\in A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}}E_n\left(y^{(2r)}(x)\right)\,,$$

$E_n\left(y^{(2r)}(x)\right)$- *наилучшее приближение непрерывной функции* $y^{(2r)}(x)$ *алгебраическими многочленами степени не выше* $n$ *на отрезке* $[0,1]$.

**Доказательство.** В силу условия А решение краевой задачи $\{(1), (2)\}$ задается формулой

$$y(x)=\int_0^1 G(x,t)y^{(2r)}(t)dt\,, \tag{12}$$

где $y^{(2r)}(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y^{(2r)}(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)y^{(2r)}(t)dt=f(x)\,,$$

$$K(x,t)=\sum_{k=0}^{2r-2}a_k(x)\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}.$$

Так как приближенное решение $y_n(x)$удовлетворяет краевым условиям *(2)*, то в силу условия А

$$y_n(x)=\int_0^1 G(x,t)y_n^{(2r)}(t)dt\,, \tag{13}$$

где $y_n^{(2r)}(x)$ является решением интегрального уравнения

$$y_n^{(2r)}(x)-\lambda\int_0^1 P_n[K(x,t)]y_n^{(2r)}(t)dt = P_n[f(x)]\,,$$

$$P_n[K(x,t)]=\sum_{k=0}^{n}K(t_{kn},t)l_{kn}(x),$$

$$P_n[f(x)]=\sum_{k=0}^{n}f(t_{kn})l_{kn}(x)\text{ -}$$

интерполяционные многочлены Лагранжа функции $K(x,t)$ и $f(x)$ соответственно.

Из формул *(12)* и *(13)* заключаем, что

$$y^{(l)}(x)-y_n^{(l)}(x)=\int_0^1\frac{\partial^l G(x,t)}{\partial x^l}\left[y^{(2r)}(t)-y_n^{(2r)}(t)\right]dt \qquad (14)$$

$$l=(0,1,\ldots,2r-2)$$

Из условия Б следует, что функция Грина $G(x,t)$ является симметрической функцией. Тогда учитывая формулу *(14)* для остатка $R_{nN}(y)$ квадратурной формулы вида *(3)* получим

$$R_{nN}(y)=\int_0^1 F_{2r}(t)\left[y^{(2r)}(t)-y_n^{(2r)}(t)\right]dt \qquad (15)$$

где

$$F_{2r}(t)=\int_0^t G(x,t)dx+\int_t^1 G(t,x)dx-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2r-2}A_k^{(l)}\left[E(x_k-t)\frac{\partial^l G(t,x_k)}{\partial x^l}+\right.$$

$$\left.+E(t-x_k)\frac{\partial^l G(x_k,t)}{\partial x^l}\right],$$

$$E(u)=\begin{cases}1, \text{ при } u\ge 0\,,\\ 0, \text{ при } u<0\,.\end{cases}$$

Формулу *(15)* представим в виде

$$R_{nN}(y)=\int_0^1\sqrt{p(t)}\left[y^{(2r)}(t)-y_n^{(2r)}(t)\right]\frac{F_{2r}(t)}{\sqrt{p(t)}}dt\,. \qquad (16)$$

Применяя неравенство Буняковского к *(16)* находим, что

$$|R_{nN}(y)|\le\sqrt{M}\cdot\left(\int_0^1 p(t)\left[y^{(2r)}(t)-y_n^{(2r)}(t)\right]^2dt\right)^{1/2}\times\left(\int_0^1|F_{2r}(t)|^2dt\right)^{1/2}. \qquad (17)$$

Из *(8)* следует, что

$$y_n^{(2r)}(x)=\sum_{k=0}^{n}y^{(2r)}(t_{kn})l_{kn}$$

является многочленом Лагранжа функции $y^{(2r)}(x)$. Тогда согласно теореме Эрдеш-Турана ([6], стр.50)

$$\left(\int_0^1 p(t)\left[y^{(2r)}(t)-y_n^{(2r)}(t)\right]^2dt\right)^{1/2}\le 2E_n\left(y^{(2r)}(t)\right)\left(\int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2} \qquad (18)$$

Учитывая неравенство *(18)* из неравенства *(17)* будем иметь

$$|R_{nN}(y)| \le 2\left(M \cdot \int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2} \cdot E_n \cdot \left(\int_0^1 |F_{2r}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \qquad (19)$$

В неравенстве *(19)* правую часть нельзя уменьшить, так как в классе $A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}$ существует функция, для которой это неравенство превращается в равенство.

Чтобы получить такую функцию рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(2r)}(x) = 2\left(M \cdot \int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2} \cdot E_n \cdot \left(\int_0^1 |F_{2r}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \cdot |F_{2r}(x)| signF_{2r}(x) \qquad (20)$$

при краевых условиях *(2)*. Правую часть уравнения *(20)* обозначим через $\Psi(x)$. Тогда для приближенного решения $y_n(x)$ краевой задачи {*(20)*, *(2)*} имеет место равенство

$$y_n^{(2r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \Psi(t_{kn}) l_{kn}(x) = L_n(\Psi(x)). \qquad (21)$$

Следовательно, в неравенстве *(19)* знак равенства имеет место для функции $z(x) \in A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}$, у которой

$$z^{(2r)}(x) = \Psi(x) + L_n(\Psi(x)), \qquad (22)$$

где

$$\Psi(x) = 2\left(M \cdot \int_0^1 p(t)dt\right)^{1/2} \cdot E_n \cdot \left(\int_0^1 |F_{2r}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \cdot |F_{2r}(x)| signF_{2r}(x).$$

Таким образом, построение наилучшей квадратурной формулы вида *(3)* для класса $A_{gT}^{(2r)}W_{L_{2,p}}$ свелось к минимизации интеграла

$$\int_0^1 |F_{2r}(t)|^2 dt. \qquad (23)$$

Так как функция Грина $G(x,t)$ дифференциального выражения $y^{(2r)}$ при граничных условиях *(2)* является относительно $x$ при $x \le t$ и относительно $t$ при $x > t$ многочленом степени $2r-1$, то $F_{2r}(t)$ на отрезке $[0,1]$ имеет вид

$$F_{2r}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{2r}}{(2r)!} & npu \quad t \in [0, x_0] \\ \dfrac{t^{2r}}{(2r)!} + \sum\limits_{j=0}^{2r-1} a_j t^j & npu \underset{(i=1,\,2,\,\ldots,\,N-1)}{\quad t \in [x_{i-1}, x_i]} \\ \dfrac{(t-1)^{2r}}{(2r)!} & npu \quad t \in [x_{N-1}, 1] \end{cases} \qquad (24)$$

Тогда в силу теоремы Д.1 ([3], [2] стр.142) интеграл

$$\left(\int_0^1 |F_{2r}(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

принимает наименьшее значение

$$\frac{L_{2r}(1)}{(2r)!(4r+1)^{1/2}}\omega_N^{2r} \tag{25}$$

только и только для коэффициентов $A_k^{(i)}$ и узлов $x_k$, определяемые равенствами *(9)* и *(10)* соответственно.

## Литература


[1]. Никольский С.М. *К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.* УМН, 1950, т.5, №2, с.165-177.

[2]. Никольский С.М. *Квадратурные формулы.* М.: "Наука", 1988, 255с.

[3]. Ибрагимов И.И., Алиев Р.М. *Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций.* ДАН СССР, 1965, т.162, №1, с.23-25.

[4]. Алиев Р.М. *Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций.* ДАН СССР, 1989, т.306, №1, с.11-15.

[5]. Алиев Р.М. *Применение проекционных методов к построению наилучших квадратурных формул на множествах решений краевых задач.* ДАН СССР, 1989, т.305, №3, с.525-529.

[6]. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* Минск: "Высшая школа", 1968, 315с.


**Əliyev R.M.** **SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLƏRİ ÇOXLUĞUNDA BİR EKSTREMAL MƏSƏLƏ HAQQINDA**


Məqalədə sərhəd məsələsinin həlləri çoxluğunda sərhəd məsələsinin interpolyasiya üsulu ilə tapılmış təqribi həllinin daxil olduğu S.M. Nikolski şəkilli ən yaxşı kvadratur düstur qurulur.


**Aliev R.M.** **ON AN EXTREMAL PROBLEM IN A SET OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS**


The best quadrature formulae of S.M.Nikolsky type is established in the set of boundary value problems solutions containing an approximate solution of boundary value problem by an interpolation method.