1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.956.2

МАМЕДОВ И.Т.

ОБ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть D- ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E_n $(n \geq 3)$ точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, ∂D – ее граница, $O \in D$, $\partial D \in C^2$. Рассмотрим в D задачу Дирихле

$$Lu = \Delta u + \mu \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{|x|^2} u_{ij} = f(x), \quad x \in D; \quad u\big|_{\partial D} = 0. \qquad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, $\mu > -1$ – некоторая константа, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i,j=1,\ldots,n)$, $f(x) \in L_2(D)$. Нетрудно видеть, что оператор L является равномерно эллиптичекским в D. Его часто называют оператором Гилбарга-Серрина. Хорошо известно [1-2], что если $\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ – общий равномерно эллиптический оператор 2-го порядка с измеримыми коэффициентами, то задача Дирихле

$$\mathcal{L}u = f(x), \quad x \in D; \quad u\big|_{\partial D} = 0$$

при условии

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x)}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right]^2} < \frac{1}{n-1} \qquad (2)$$

для всякой $f(x) \in L_2(D)$ имеет единственное обобщенное (почти всюду) решение из пространства $W_2^2(D)$. Условие (2) для оператора L эквивалентно неравенству

$$\mu < \frac{n}{n-2}. \qquad (3)$$

В случае, когда нарушается условие (3), вышеуказанный факт, вообще говоря, не имеет места. Действительно, если D –единичный n-

мерный шар с центром в начале координат, $\alpha = \frac{\mu - n + 2}{1 + \mu}$ $(\mu \neq n - 2)$, то функция

$$u_1(x) = |x|^{\alpha} - 1$$

в $D \setminus \{0\}$ удовлетворяет однородному уравнению $Lu = 0$ (см. [3]). При этом, если $\mu > n - 2$ $(n \geq 4)$ и $\mu > 3$ $(n = 3)$, то $u_1(x) \in \dot{W}_2^2(D)$. Таким образом, при указанных μ однородная задача (1) имеет два обобщенных решения $u_1(x)$ и $u_2(x) \equiv 0$ из пространства $\dot{W}_2^2(D)$. Кроме того, функция $u_1(x)$ показывает, что для решений уравнения $Lu = 0$ несправедлив принцип об устранимости особенностей, верный для гармонических функций (а также для решений эллиптических уравнений 2-го порядка с непрерывными коэффициентами)-ограниченная в D и гармоническая в $D \setminus \{0\}$ функция, обращающаяся в нуль на ∂D, тождественно равна нулю.

В [4] показано, что задача Дирихле для эллиптического уравнения 2-го порядка, коэффициенты которого являются однородными функциями степени нуль, однозначно обобщенно разрешима в некотором весовом пространстве Соболева. При этом не указывался эффективный способ нахождения весовых функций для каждого конкретного уравнения (см. также [5]).В [6] для первой краевой задачи (1) упомянутый результат доказан с конкретным указанием весовых функций в зависимости от μ. Целью настоящей статьи является нахождение точных весовых функций соответствующих пространств Соболева, в которых задача (1) однозначно обобщенно разрешима. Кроме того, делается попытка перенести принцип об устранимости особенностей на решения уравнения $Lu = 0$.

Пусть $n \geq 4$, $\mu \neq n - 2$, а γ-числовой параметр, удовлетворяющий условию

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma \in \left(2 - n, 2\frac{n-1}{1+\mu} - n\right), & \textit{если} \quad \mu < n - 2 \\ \gamma \in \left(2\frac{n-1}{1+\mu} - n, 2 - n\right), & \textit{если} \quad \mu > n - 2 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Обозначим через $A_\gamma^0(D)$ $(A_\gamma(D))$ подмножество функций $u(x)$ из пространства $C_0^\infty(D)$ $(C^\infty(\overline{D}))$, для которых конечно выражение

$$\left[\int_D \left(r^{\gamma-2}u^2 + r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 + r^{\gamma+2} \sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2\right) dx\right]^{1/2}, \tag{5}$$

где $r = |x|$. Очевидно, что если $\mu < n - 2$, то $A_\gamma^0(D) = C_0^\infty(D)$, $A_\gamma(D) = C_0^\infty(\overline{D})$, Через Q будем обозначать шар с центром в начале координат такой, что $\overline{Q} \subset D$.

Лемма 1. *Пусть* $n \geq 4$, $\mu \neq n-2$, *а относительно* γ *выполнено условие (4). Тогда для любой функции* $u(x) \in A_\gamma^0(Q)$ *справедливо неравенство*

$$\int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx \leq -C_1 \int_Q r^\gamma uLudx, \tag{6}$$

где положительная константа C_1 *зависит лишь от* μ, γ *и* n.

Доказательство. Имеем

$$-\int_Q r^\gamma uludx = -\int_Q r^\gamma u\Delta udx - \mu\int_Q r^\gamma u\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{x_i x_j}{r^2}u_j\right)_i dx +$$
$$+\mu(n-1)\int_Q r^{\gamma-2}u\sum_{i=1}^n x_i u_i dx = a_1 + a_2 + a_3. \tag{7}$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$a_1 = \sum_{i=1}^n \int_Q (r^\gamma u)_i u_i dx = \int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx + \gamma\sum_{i=1}^n \int_Q r^{\gamma-2} x_i u u_i dx = \int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx -$$
$$-\frac{\gamma}{2}\sum_{i=1}^n \int_Q (r^{\gamma-2}x_i)_i u^2 dx = \int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx - \frac{\gamma}{2}(n+\gamma-2)\int_Q r^{\gamma-2}u^2 dx. \tag{8}$$

Аналогично выводим

$$a_2 = \mu\int_Q (r^\gamma u)_i \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{r^2}u_j dx = \mu\int_Q r^\gamma \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{r^2}u_i u_j dx +$$
$$+\mu\gamma\sum_{i,j=1}^n \int r^{\gamma-2}u\frac{x_i^2 x_j}{r^2}u_j dx = \mu\int_Q r^\gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r}u_i\right)^2 dx -$$
$$-\frac{\mu\gamma}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_Q (r^{\gamma-4}x_i^2 x_j)_j u^2 dx = \mu\int_Q r^\gamma |\nabla_1 u|^2 dx -$$
$$-\frac{\mu\gamma}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_Q r^{\gamma-4}u^2\left(x_i^2 + 2\delta_{ij}x_j^2 + (\gamma-4)\frac{x_i^2 x_j^2}{r^2}\right)dx =$$
$$= \mu\int_Q r^\gamma |\nabla_1 u|^2 dx - \frac{\mu\gamma}{2}(n+\gamma-2)\int_Q r^{\gamma-2}u^2 dx, \tag{9}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а $|\nabla_1 u|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r}u_i\right)^2$.

Далее имеем

$$a_3 = -\frac{\mu(n-1)}{2}\sum_{i=1}^n \int_Q (r^{\gamma-2}x_i)_i u^2 dx = -\frac{\mu(n-1)(n+\gamma-2)}{2}\int_Q r^{\gamma-2}u^2 dx. \tag{10}$$

Учитывая (8)-(10) в (7), получаем

$$-\int_Q r^\gamma uLudx = \int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx + \mu\int_Q r^\gamma |\nabla_1 u|^2 dx - \frac{n+\gamma-2}{2}\times$$
$$\times[\gamma(1+\mu)+\mu(n-1)]\int_Q r^{\gamma-2}u^2dx. \qquad (11)$$

Пусть вначале $\mu < n-2$. Передположим, что $\gamma \in \left(2-n, -\frac{\mu(n-1)}{1+\mu}\right]$. Тогда

$$-\int_Q r^\gamma uLudx \ge \int_Q r^\gamma \sum_{i=1}^n u_i^2 dx + \mu\int_Q r^\gamma |\nabla_1 u|^2 dx. \qquad (12)$$

Рассмотрим случай $\gamma \in \left(-\frac{\mu(n-1)}{1+\mu}, \quad 2\frac{n-1}{1+\mu}-n\right)$. При $\gamma > 2-n$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\varepsilon\int_Q r^{\gamma-2}u^2dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_Q r^\gamma|\nabla_1 u|^2dx \ge -2\sum_{i=1}^n\int_Q r^{\gamma-2}x_i u u_i dx = \sum_{i=1}^n\int_Q (r^{\gamma-2}x_i)_i u^2 dxdx =$$
$$(n+\gamma-2)\int_Q r^{\gamma-2}u^2dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{n+\gamma-2}{2}$, получаем

$$\int_Q r^{\gamma-2}u^2dx \le \frac{4}{(n+\gamma-2)^2}\int_Q r^\gamma|\nabla_1 u|^2dx. \qquad (13)$$

Используя (13) в (11) и учитывая то, что при рассматриваемых значениях γ

$$\frac{2}{n+\gamma-2}[\gamma(1+\mu)+\mu(n-1)] < 1+\mu,$$

получаем

$$(1+\mu-\delta)\int_Q r^\gamma|\nabla_1 u|^2dx - \int_Q r^\gamma uLudx \ge \int_Q r^\gamma\sum_{i=1}^n u_i^2dx + \mu\int_Q r^\gamma|\nabla_1 u|^2dx, \qquad (14)$$

где положительная константа δ зависит лишь от μ, γ и n. Из (12) следует, что оценка (14) справедлива при $\gamma \in \left(2-n, \quad 2\frac{n-1}{1+\mu}-n\right)$. Теперь достаточно учесть, что

$$\int_Q r^\gamma|\nabla_1 u|^2dx \le \int_Q r^\gamma\sum_{i=1}^n u_i^2dx, \qquad (15)$$

и мы получаем требуемое неравенство (6) с $C_1 = \delta^{-1}$. Случай $\mu > n-2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы*

$$\int_Q\left(r^{\gamma-2}u^2 + r^\gamma\sum_{i=1}^n u_i^2\right)dx \le C_2\int_Q r^{\gamma+2}(Lu)^2dx, \qquad (16)$$

где положительная константа C_2 *зависит лишь от* μ, γ *и* n. *Действительно, из (6), (13), и (15) следует, что любого* $\varepsilon > 0$

$$\int_Q r^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 dx \le \frac{C_1 \varepsilon}{2} \int_Q r^{\gamma-2} u^2 dx + \frac{C_1}{2\varepsilon} \int_Q r^{\gamma+2} (Lu)^2 dx \le$$

$$\le \frac{2C_1 \varepsilon}{(n+\gamma-2)^2} \int_Q r^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 dx + \frac{C_1}{2\varepsilon} \int_Q r^{\gamma+2} (Lu)^2 dx.$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{(n+\gamma-2)^2}{4C_1}$, *получаем*

$$\int_Q r^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 dx \le C_3 \int_Q r^{\gamma+2} (Lu)^2 dx, \qquad (17)$$

где $C_3 = \dfrac{4C_1^2}{(n+\gamma-2)^2}$. *Теперь достаточно учесть (13) , и оценка (16) доказана с* $C_2 = C_3 \left(1 + \dfrac{4}{(n+\gamma-2)^2} \right)$.

Замечание. *Как видно из доказательства, мы нигде не использовали то , что* $n \ge 4$. *Таким образом, неравенство (16) справедливо и при n=3, если только* γ *удовлетворяет условию (4).*

Лемма 2. *Если выполнены условия предыдущей леммы, то для любой функции* $u(x) \in A_\gamma^0(Q)$ *справедливо неравенство*

$$\int_Q r^{\gamma+2} \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}^2 dx \le C_4 \int_Q r^{\gamma+2} (Lu)^2 dx, \qquad (18)$$

где положительная константа C_4 *зависит лишь от* μ, γ *и* n.

Доказательство. Пусть $u(x) \in A_\gamma^0(Q)$ k - произвольное натуральное число, $1 \le k \le n$. Хотя, вообще говоря, функция ru_k не принадлежит $A_\gamma^0(Q)$, , тем не менее, как видно из доказательства леммы 1, для нее справедливо неравенство (6). Согласно последнему имеем

$$\int_Q r^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} (ru_k)_i^2 dx \le -C_1 \int_Q r^{\gamma+1} u_k L(ru_k) dx. \qquad (19)$$

С другой стороны

$$\int_Q r^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} (ru_k)_i^2 dx = (1-n-\gamma) \int_Q r^{\gamma} u_k^2 dx + \int_Q r^{\gamma+2} \sum_{i=1}^{n} u_{ki}^2 dx. \qquad (20)$$

Учитывая, что

$$L(ru_k) = rLu_k + u_k Lr + 2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + \mu \frac{x_i x_j}{r^2} \right) r_i u_{kj},$$

$$Lr = \frac{n-1}{r},$$

получаем

$$-C_1\int_Q r^{\gamma+1}u_k L(ru_k)dx = -C_1\int_Q r^{\gamma+2}u_k Lu_k dx - C_1(n-1)\int_Q r^\gamma u_k^2 dx -$$

$$-2C_1\sum_{i=1}^n\int_Q r^\gamma x_i u_k u_{ki}dx - 2\mu C_1\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma-2}x_i^2 x_j u_k u_{kj}dx = b_1 + b_2 + b_3 + b_4. \qquad (21)$$

Имеем далее

$$b_1 = -C_1\int_Q r^{\gamma+2}u_k (Lu)_k dx - C_1\int_Q r^{\gamma+2}u_k\left[Lu_k - (Lu)_k\right] = b_{11} + b_{12}.$$

Но нетрудно видеть, что для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$b_{11} = C_1\int_Q \left(r^{\gamma+2}u_k\right)_k Ludx = C_1\int_Q r^{\gamma+2}u_{kk}Ludx + C_1(\gamma+2)\int_Q r^\gamma x_k u_k Ludx \le$$

$$\le \frac{C_1\varepsilon_1}{2}\int_Q r^{\gamma+2}u_{kk}^2 dx + \left(\frac{C_1}{2\varepsilon_1} + \frac{C_1(\gamma+2)}{2}\right)\int_Q r^{\gamma+2}(Lu)^2 dx + \qquad (22)$$

$$+\frac{C_1(\gamma+2)}{2}\int_Q r^2 u_k^2 dx.$$

Кроме того при всяком $\varepsilon_2 > 0$

$$b_{12} = C_1\mu\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma+2}u_k\left(\frac{x_i x_j}{r^2}\right)_k u_{ij}dx = C_1\mu\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma+2}u_k\left[\frac{\delta_{ik}x_j}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{jk}x_i}{r^2} - 2\frac{x_i x_j x_k}{r^4}\right]u_{ij}dx = -C_1\mu(n+\gamma)\int_Q r^\gamma u_k^2 dx -$$

$$-2C_1\mu\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma-2}u_k x_i x_j x_k u_{ij}dx \le C_1\mu\varepsilon_2\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma+2}u_{ij}^2 dx +$$

$$+\left(\frac{C_1\mu}{\varepsilon_2} - C_1\mu(n+\gamma)\right)\int_Q r^\gamma u_k^2 dx. \qquad (23)$$

Аналогично получаем

$$b_3 = C_1(n+\gamma)\int_Q r^\gamma u_k^2 dx, \quad b_4 = C_1\mu(n+\gamma)\int_Q r^\gamma u_k^2 dx. \qquad (24)$$

Используя (22)-(24) в (21), заключаем

$$-C_1\int_Q r^{\gamma+1}u_k Lu_k dx \le \frac{C_1\varepsilon_2}{2}\int_Q r^{\gamma+2}u_{kk}^2 dx + C_1\mu\varepsilon_2\sum_{i,j=1}^n\int_Q r^{\gamma+2}u_{ij}^2 dx +$$

$$+\left(\frac{C_1}{2\varepsilon_1} + \frac{C_1(\gamma+2)}{2}\right)\int_Q r^{\gamma+2}(Lu)^2 dx + C_5\int_Q r^\gamma u_k^2 dx, \qquad (25)$$

где положительная константа C_5 зависит лишь от μ, γ, n и ε_2. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2C_1}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{4nC_1\mu}$. Суммируя (20) и (25) по k от 1 до n и учитывая полученные неравенства в (19), имеем

$$\int\limits_Q r^{\gamma+2}\sum_{i,j=1}^{n}u_{ij}^2dx \le \frac{1}{2}\int\limits_Q r^{\gamma+2}\sum_{i,j=1}^{n}u_{ij}^2dx + C_6\int\limits_Q r^{\gamma+2}(Lu)^2\,dxC_7\int\limits_Q r^{\gamma}\sum_{i=1}^{n}u_i^2dx,$$

где положительные C_6 и C_7 зависят лишь от μ,γ и n. Теперь достаточно использовать следствие из леммы 1, и требуемая оценка (18) доказана.

Лемма 3. *Пусть* $n=3,\ \mu<3,\ u(x)\in C_0^\infty(Q)$. *Тогда существует положительная константа* C_8, *зависящая лишь от* μ, *такая, что*

$$\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2dx \le C_8\int\limits_Q(Lu)^2\,dx. \tag{26}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2dx = \int\limits_Q(\Delta u)^2\,dx.$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2dx &= \int\limits_Q\left(\Delta u-\frac{2}{3+\mu}Lu+\frac{2}{3+\mu}Lu\right)^2dx\le\\ &\le(1+\varepsilon)\int\limits_Q\left[\left(\Delta-\frac{2}{3+\mu}L\right)u\right]^2dx+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{4}{(3+\mu)^2}\int\limits_Q(Lu)^2\,dx.\end{aligned} \tag{27}$$

Но с другой стороны

$$\left[\left(\Delta-\frac{2}{3+\mu}L\right)u\right]^2=\left[\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{1+\mu}{3+\mu}\delta_{ij}-\frac{2\mu}{3+\mu}\frac{x_ix_j}{r^2}\right)u_{ij}\right]^2\le$$

$$\le\frac{3+2\mu+3\mu^2}{(3+\mu)^2}\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2=(1-\delta)\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2,$$

где $\delta=\dfrac{2}{(3+\mu)^2}(1+\mu)(3-\mu)$. Заметим, что при сделанных относительно μ предположениях $\delta>0$. Полагая теперь в (27) $\varepsilon=\delta$, получаем

$$\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2dx\le(1-\delta^2)\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{3}u_{ij}^2dx+\frac{\delta+1}{\delta}\frac{4}{(3+\mu)^2}\int\limits_Q(Lu)^2\,dx.$$

Отсюда следует требуемая оценка (26) с $C_8=\dfrac{4(\delta+1)}{\delta^3(3+\mu)^2}$.

Пусть ν -параметр, удовлетворяющий условию

$$\left.\begin{aligned}&\nu\in\left(4-n,\quad 2\frac{n+\mu}{1+\mu}-n\right),\quad \textit{если}\quad \mu<n-2\\ &\nu\in\left(2\frac{n+\mu}{1+\mu}-n,\quad 4-n\right),\quad \textit{если}\quad \mu>n-2\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

при $n\ge4$, или

$$\left.\begin{array}{lll} \nu = 0 & \text{если} & \mu < 3 \\ \nu \in \left(\dfrac{3-\mu}{1+\mu}, 1\right) & \text{если} & \mu \le 3 \end{array}\right\} \qquad (28')$$

при $n=3$.

Обозначим через $W^2_{2,\nu}(D)\,(L_{2,\nu}(D))$ при $\mu \ne n-2, n \ge 4$ и $\mu \ge 3, n=3$ замыкание $A_{\nu-2}(D)$ по нормам, определяемым равенствами (5) и

$$\|u\|_{L_{2,\nu}(D)} = \left(\int_D r^\nu u^2 dx\right)^{1/2}$$

соответственно. Определим $\dot{W}^2_{2,\nu}(D)$ как подпространство $W^2_{2,\nu}(D)$, плотным множеством в котором является совокупность функций из $A_{\nu-2}(D)$, обращающихся в нуль на ∂D.

Теорема 1. *Пусть относительно параметра* ν *выполнены условия (28) или (28'). Тогда, если* $\mu \ne n-2$ *при* $n \ge 4$ *и* $\mu \ge 3$ *при* $n=3$ *для любой функции* $u_1(x) \in \dot{W}^2_2(D)$ *существует положительная константа* C_9, *зависящая лишь от* μ, ν, n *и области D, такая, что*

$$\|u\|_{W^2_{2,\nu}(D)} \le C_9 \|Lu\|_{L_{2,\nu}(D)}.$$

Если же n=3 и $\mu < 3$, *то для всякой функции* $u_1(x) \in \dot{W}^2_2(D)$ *существует положительная константа* $C_{10} = C(\mu, D)$ *такая, что*

$$\|u\|_{W^2_2(D)} \le C_{10} \|Lu\|_{L_2(D)}.$$

Теорема 2. *Пусть относительно* ν *выполнены условия (28) или (28'). Тогда, если* $\mu \ne n-2$ *при* $n \ge 4$ *и* $\mu \ge 3$ *при* $n=3$, *то задача Дирихле (1) имеет единственное обобщенное (почти всюду) решение* $u(x) \in \dot{W}^2_{2,\nu}(D)$ *для всякой функции* $f(x) \in L_{2,\nu}(D)$. *При этом*

$$\|u\|_{\dot{W}^2_2(D)} \le C_9 \|f\|_{L_{2,\nu}(D)}.$$

Если n=3 и $\mu < 3$, *то однозначная обобщенвая разрешимость задачи (1) имеет место в пространстве* $\dot{W}^2_2(D)$ *для любой функции* $f(x) \in L_2(D)$, *причем*

$$\|u\|_{W^2_2(D)} \le C_{10} \|f\|_{L_2(D)}.$$

Следствие. *Если* $\mu < \dfrac{n}{n-2}$, *то задача (1) коэрцитивно разрешима в* $\dot{W}^2_2(D)$ *при всякой* $f(x) \in L_2(D)$.

Достаточно заметить, что при $n \geq 4$ *и* $\mu < \dfrac{n}{n-2}$ *имеет место неравенство*

$$2\frac{n+\mu}{1+\mu} - n > 0.$$

Мы опускаем здесь доказательства теорем 1 и 2. С использованием лемм 1-3 эти доказательства могут быть проведены по стандартной схеме (см. напр. [7]).

Рассмотрим теперь случай, когда $n \geq 4$ и $\mu = n-2$. Обозначим через $V_2^2(D)$ и $L_{2,\ln^2 r}(D)$ замыкание функций из $C^\infty(\overline{D})$ по нормам

$$\|u\|_{V_2^2(D)} = \left[\int_D \left(\frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 + r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2 + r^{4-n}\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2\right)dx\right]^{1/2}$$

и

$$\|u\|_{L_{2,\ln^2 r}(D)} = \left[\int_D u^2 r^{4-n}\ln^2 r dx\right]^{1/2}$$

соответсвенно. Пусть $\overset{\circ}{V}{}_2^2(D)$ – подпространство $V_2^2(D)$, плотным множеством в котором является совокупность функций из $C^\infty(\overline{D})$, обращающихся в нуль на ∂D.

Предположим вначале, что $u(x) \in C_0^\infty(Q)$. Полагая в (11) $\mu = n-2$ и $\gamma = 2-n$, получаем

$$-\int_Q r^{2-n} uLu dx = \int_Q r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2 dx + (n-2)\int_Q r^{2-n}|\nabla_1 u|^2 dx, \tag{29}$$

или для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_Q r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_Q \frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q r^{4-n}\ln^2 r(Lu)^2 dx. \tag{30}$$

С другой стороны для любого $\delta > 0$

$$\delta\int_Q \frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 dx + \frac{1}{\delta}\int_Q r^{2-n}|\nabla_1 u|^2 dx \geq 2\sum_{i=1}^n\int_Q \frac{r^{-n}}{\ln r}x_i u u_i dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n\int_Q\left(\frac{r^{-n}}{\ln r}x_i\right)_i u^2 dx = \int_Q \frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 dx.$$

Полагая теперь $\delta = \dfrac{1}{2}$, заключаем

$$\int_Q \frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 dx \leq 4\int_Q r^{2-n}|\nabla_1 u|^2 dx \leq 4\int_Q r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2 dx. \tag{31}$$

Используем (31) в (30) при $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Получим

$$\int_Q r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2dx \le 4\int_Q r^{4-n}\ln^2 r(Lu)^2dx,$$

откуда следует

$$\int_Q\left(\frac{r^{-n}}{\ln^2 r}u^2 + r^{2-n}\sum_{i=1}^n u_i^2\right)dx \le 20\int_Q r^{4-n}\ln^2 r(Lu)^2dx. \qquad (32)$$

Продолжая теперь также, как и в доказательстве леммы 2, из (29) и (32) выводим

$$\|u\|^2_{V_2^2(Q)} \le C_{11}\|Lu\|_{L_{2,\ln^2 r}(Q)},$$

где положительная константа C_{11} зависит лишь от n. Таким образом справедлива.

Теорема 3. *При* $n\ge 4$ *и* $\mu = n-2$ *задача Дирихле имеет единственное обобщенное (почти всюду) решение* $u(x)\in V_2^2(D)$ *для всякой функции* $f(x)\in L_{2,\ln^2 r}(D)$. При этом

$$\|u\|_{V_2^2(Q)} \le C_{12}\|Lu\|_{L_{2,\ln^2 r}(D)},$$

где $C_{12} = C(n,D))$.

Перейдем теперь к вопросу об устранимости компактов в классе ограниченных решений однородного уравнения

$$Lu = 0. \qquad (33)$$

Здесь и далее наши рассмотрения близки к работе [8].

Пусть $H\subset D$ – компакт. Если задача

$$Lu = 0,\quad x\in D\setminus H;\quad u\big|_{\partial D} = 0,\quad |u(x)|\le M<\infty \qquad (34)$$

имеет только тривиальное решение, то компакт H называется устранимым в классе ограниченных решений уравнения (33).

Лемма 4. *Пусть* $\mu < n-2$, y – *произвольная фиксированная точка области* D,

$$S = \begin{cases}\dfrac{n-2-\mu}{1+\mu}, & \text{если}\quad \mu\ge 0\\ n-2+\mu, & \text{если}\quad \mu<0,\end{cases}$$

$\vartheta(x,y) = |x-y|^{-S}$. *Тогда*

$$L_x\vartheta(x,y)\le 0,\quad x\in D\setminus\{y\cup 0\}.$$

Если же $\mu = n-2$, $d = diamD$, $w(x,y) = \ln\dfrac{2d}{|x-y|}$, *то*

$$L_x w(x,y)\le 0,\quad x\in D\setminus\{y\cup 0\}.$$

Доказательства. Если $\mu<n-2$, а S – положительное число, которое будет выбрано позже, то для $x\in D\setminus\{y\cup 0\}$

$$L\vartheta = S|x-y|^{-S-2}\left[S+2-n-\mu+\mu(S+2)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_i x_j(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x|^2|x-y|^2}\right]. \qquad (35)$$

Если $\mu \geq 0$, то, учитывая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_i x_j(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x|^2|x-y|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-y_i)}{|x||x-y|}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{|x|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-y_i)^2}{|x-y|^2} = 1$$

и выбирая $S = \dfrac{n-2-\mu}{1+\mu}$, из (35) приходим к утверждению леммы, Если же $\mu < 0$,

$$L\vartheta \leq S|x-y|^{-S-2}[S+2-n-\mu],$$

и достаточно выбрать $S = n-2+\mu$. Случай $\mu = n-2$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь *g(x,y)*- положительная функция, определенная в $D \times D$, непрерывная при $x \neq y$, причем

$$\lim_{x \to y} g(x,y) = \infty.$$

Назовем меру λ на H g- допустимой, если

$$\int_H g(x,y)d\lambda(y) \leq 1, \quad x \notin H.$$

Число $cap_g(H) = \sup \lambda(H)$, где точная верхняя грань берется по всем g-допустимым мерам, называется g-емкостью компакта H.

Теорема 4. *Пусть $H \subset D$ – компакт и $O \in H$. Для устранимости H в классе ограниченных решений уравнения (33) достаточно, чтобы*

$$cap_\vartheta(H) = 0, \quad \text{если} \quad \mu < n-2 \qquad (36)$$

и

$$cap_w(H) = 0, \quad \text{если} \quad \mu = n-2.$$

Доказательство. Мы докажем теорему при $\mu < n-2$. Случай $\mu = n-2$ рассматривается аналогично. Зафиксируем произвольные $x' \in D \setminus H$ и $\varepsilon > 0$. Если выполнено (36), то существуют область H_ε, $H \subset H_\varepsilon$, $\overline{H}_\varepsilon \subset D$ с достаточно гладкой границей ∂H_ε и мера λ_ε на ∂H_ε такие, что если S выбрано в соответствии с леммой 4 и

$$U_\varepsilon(x) = \int_{\partial H_\varepsilon}\frac{d\lambda_\varepsilon(y)}{|x-y|^S},$$

то

$$U_\varepsilon(x)\big|_{\partial H_\varepsilon} = 1, \quad \lambda_\varepsilon(\partial H_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad (37)$$

Будем считать ε настолько малым, что $x' \in D \setminus H_\varepsilon$ и

$$dist(x', \partial H_\varepsilon) \geq \frac{1}{2}dist(x', H). \qquad (38)$$

Пусть $u(x)$ – решение задачи (34). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(x) = u(x) - MU_\varepsilon(x).$$

Согласно лемме 4 и (37)

$$Lz(x) \geq 0, \quad x \in D \setminus H_\varepsilon; \quad z(x)\Big|_{\partial(D\setminus H_\varepsilon)} \leq 0.$$

По принципу максимума $z(x) \leq 0$ в $D \setminus H_\varepsilon$. В частности, с учетом (37) и (38)

$$u(x') \leq M[dist(x', \partial H_\varepsilon)]^{-s} \lambda_\varepsilon(\partial H_\varepsilon) \leq M 2^s [dist(x', H)]^{-s} \varepsilon,$$

что в силу произвольности ε дает $u(x') \leq 0$. Используя теперь произвольность точки x' в $D \setminus H$, получаем

$$u(x) \leq 0, \quad x \in D \setminus H. \tag{39}$$

Совершенно идентичным образом выводится оценка

$$u(x) \geq 0, \quad x \in D \setminus H. \tag{40}$$

Из (39)-(40) вытекает, что $u(x) \equiv 0$ в $D \setminus H$. Теорема доказана.

Литература

[1]. Talenti G. *Sopra una classe di equazioni ellitiche a coefficienti misurableili*,-Ann. Mat. pura appl., 1965,v.69, p.285-304.

[2]. Алхутов Ю.А.,Мамедов И.Т. *Первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами*, -Матем.сб., 1986, т. 131(173), №4(12), с. 477-500.

[3]. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* –М., «Наука», 1973, 576 с.

[4]. Bass R.F. The Dirichlet problem for radially homogeneous elliptic operators-, Trans. of AMS, 1990, v.320, №2, p.593-614.

[5]. Мамедов И.Т., Мамтиев Т.Р. Коэрцитивная оценка для эллиптических операторов 2-го порядка с однородными коэффициентами, - В сб. трудов I Республиканской конференции по математике и механике, Баку «Элм», 1995, ч. II, с. 140-148.

[6]. Мамтиев Т.Р. *О разрешимости первой краевой задачи для эллиптических уравнений 2-го порядка с однородными коэффициентами*, -Деп.в Аз НИИНТИ, 1995, №2287-Аз., 26 с.

[7]. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными*, М., «Мир», 1966, 351 с.

[8]. Ландис Е.М. *К вопросу о единственности решения первой краевой задачи для эллиптических и параболических уравнений второго порядка*, -УМН, 1978, т.33. №3, с.151.

Məmmədov İ.T. 2-Cİ TƏRTİBLİ KƏSİLƏN ƏMSALLI ELEPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN DİRİXLE MƏSƏLƏSİNİN ARADAN QALDIRILA BİLƏN ÇOXLUQLAR HAQQINDA

Məqalədə 2-ci tərtibli kəsilən əmsallı elleptik tənliklər sinfinə baxılır. Birinci sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.Bundan əlavə daxili kompaktın aradan qaldırıla bilməsi üçün kafi şərt tapılır.

Mamedov I.T. ON REMOVABLE SETS OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

An article deals with some class of the second order elliptic equations with discontinuous coefficients. The generalized unique solvability of the first boundary problem and sufficient condition for interior compact to be removable have been proved.