УДК 517.946

**МИРЗОЕВ С.С.**

# ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $H$- сепарабельное гильбертово пространство, $A$-положительно-определенный самосопряженный оператор в $H$.

Обозначим через $R^n$ декартово произведение $n$-копий пространства $R=(-\infty,\infty)$, а через $R_{n+1}^{+}=R^n\times R_{+}$, где $R_{+}=[0,\infty)$. Элементы пространства $R_{n+1}^{+}$ будем обозначать через $(x,x_{n+1})$, где $x\in R^n$, $x=(x_1,...,x_n)$, а $x_{n+1}\geq 0$.

Далее, определим гильбертово пространство вектор-функций со значениями в $H$, которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{L_2}=\left(\int\limits_{R^n}\int\limits_{R_+}\|f(x,x_{n+1})\|_H^2\,dxdx_{n+1}\right)^{1/2}.$$

и обозначим его через $L_2(R_{n+1}^{+},H)$.

Аналогично определим гильбертовы пространства [7]:

$$W_2^2(R_{n+1}^{+};H)=\left\{u(x,x_{n+1})\middle|x\in R^n,x_{n+1}\in R_+,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\in L_2(R_{n+1}^{+};H),\ k=\overline{1,n+1},\right.$$

$$\left.A^n u\in L_2(R_{n+1}^{+};H)\right\},$$

и

$$\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^{+};H)=\left\{u(x,x_{n+1})\middle|u(x,x_{n+1})\in W_2^2(R_{n+1}^{+};H),u(x;0)=0\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2}=\left(\sum_{k=1}^{n+1}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right\|_{L_2}^2+\|A^2u\|_{L_2}^2\right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории обобщенных фунуций.

Аналогично, можно определить пространства $L_2(R^{n+1};H)$ и $W_2^2(R^{n+1};H)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ следуюущую краевую задачу:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)+A^2u+\sum_{k=1}^{n+1}\left(A_{1,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{2,k}u\right)=f(x,x_{n+1}),\ x\in R^n,\ x_{n+1}\in R_+ \quad (1)$$

$$u(x;0)=0, \quad x\in R^n, \qquad (2)$$

где $f(x,x_{n+1})\in L_2(R_{n+1}^+;H)$, $u(x,x_{n+1})\in W_2^2(R_{n+1}^+;H)$, где $A_{1,k}$ и $A_{2,k}$ $(k=1,...,n+1)$
линейные операторы в *H*.

**Определение 1.** *Если при любом* $f(x,x_{n+1})\in L_2(R_{n+1}^+;H)$ *существует вектор-функция* $u(x,x_{n+1})\in W_2^2(R_{n+1}^+;H)$, *которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в* $R_{n+1}^+$ *и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{W_2^2}\le const\|f\|_{L_2},$$

*то будем говорить, что задача (1)-(2) имеет регулярное решение.*

Как известно, граничные задачи для обыкновенных опрераторно-дифференциальных уравнеий исследованы многими авторами и получены содержательные результаты. В этом напрравлении можно указать, например, работы [1-6] и литературы, которые указаны в этих работах. Операторно-дифференциальные уравнения в частных производных исследованы сравнительно мало. В работах [8,9] условия разрешимости уравнения (1) во всем пространстве выражены в терминах роста резольвенты на некоторых прямых. Граничные задачи для таких уравнений рассмотрены в работах [10,11], но в этих работах условия разрешимости выражены в терминах достаточно малости возмущенной части опеатоно-дифференциального уравнения.

Цель настояшей работы состоит в нахождении условия корректности и однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(2), выраженного только коэффициентами операторно-дифференциального уравнения (1). Полученные достаточные условия близки к необходимым условиям разрешимости, в том смысле, что их нельзя улучишть.

Обозначим через $P_0$ и $P_1$ операторы, действующие из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ в $L_2(R_{n+1}^+;H)$ следующим образом:

$$P_0u=\mathcal{P}_0u=\sum_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)+A^2u, \quad u\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H),$$

$$P_0u=\mathcal{P}_0u=\sum_{k=1}^{n+1}\left(A_{1,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}+A_{2,k}u,\right), \quad u\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H).$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** *Оператор* $P_0$ *осуществляет изоморфизм между пространствами* $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ *и* $L_2(R_{n+1}^+;H)$.

**Доказательство.** После переобразования Фурье по первым *n* переменным из уравнения $P_0u=0$ получаем:

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2}+\left(\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k^2 E + A^2\right)\hat{u}(\xi; x_{n+1}) = 0, \quad \xi \in R^n, \qquad (3)$$

$$\hat{u}(\xi;0) = 0, \qquad (4)$$

где $E$-единичный оператор в $H$.

Так как при любом $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in R^n$ оператор

$$-\left(|\xi|^2 + A^2\right)^{1/2} \equiv -\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 E + A^2\right)^{1/2} \equiv -A_\xi$$

порождает сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов в $H$, то $\hat{u}(\xi; x_{n+1}) = 0$, следовательно, $u(x, x_{n+1}) = 0$. Таким образом, уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$. С другой строны, уравнение $P_0 u = f$ имеет решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ при любом $f \in L_2(R_{n+1}^+;H)$, представимое в виде (см. например [2])

$$u(x, x_{n+1}) = \frac{1}{2\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\int_{R^n}\int_{R_+}\left(e^{-|x_{n+1}-t|A_\xi} - e^{-|x_{n+1}+t|A_\xi}\right)A_\xi^{-1}\, e^{-i\sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k} f(x,t)\,d\xi dt.$$

Так как для любого $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 \le \left\|\sum_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) + A^2 u\right\|_{L_2}^2 \le 2\left(\sum_{k=1}^{n+1}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right\|\left\|A^2 u\right\|_{L_2}^2\right) = 2\|u\|_{W_2^2}^2,$$

то из теоремы Банаха вытекает, что оператор $P_0$ осуществляет изоморфизм между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ и $f \in L_2(R_{n+1}^+;H)$.

**Лемма 2.** *Пусть А-положительно-определенный самосопряженный оператор, а* $A_{1,k}A^{-1}$ *и* $A_{2,k}A^{-2}$ *суть ограниченные операторы в пространстве H. Тогда оператор* $P_1$ *является непрерывным оператором, действующим из пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ *в* $f \in L_2(R_{n+1}^+;H)$.

**Доказательство.** При $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ имеет место неравенство:

$$\|P_1 u\|_{L_2} \le \sum_{k=1}^{n+1}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2} + \|A_{2,k}u\|_{L_2} \le \sum_{k=1}^{n+1}\left\|A_{1,k}A^{-1}\right\|\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2} + \left\|A_{2,k}A^{-2}\right\|\left\|A^2 u\right\|_{L_2}$$

Далее, применяя теорему о промежуточных производных [7] получаем, что

$$\|P_1 u\|_{L_2} \le \sum_{k=1}^{n+1}\left\|A_{1,k}A^{-1}\right\|_{L_2} C_k' \|u\|_{W_2^2} + \left\|A_{2,k}A^{-2}\right\| C_k'' \|u\|_{W_2^2} = const\|u\|_{W_2^2}.$$

Из леммы 1 вытекает, что норма $\|u\|_{W_2^2}$ эквивалентна норме $\|P_o u\|_{L_2}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$. Тогда из теоремы о промежуточных производных вытекает, что конечны следующие числа:

$$N_{1,j} = \sup_{0\neq u\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)} \left\| A\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L_2} \|P_0 u\|_{L_2}^{-1},\ j=1,\dots,n+1,$$

и

$$N_2 = \sup_{0\neq u\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)} \|A^2 u\| \|P_0 u\|_{L_2}^{-1}.$$

Эти числа играют важные роли при получении теоремы разрешимости задачи (1)-(2). $A$ именно имеет место .

**Теорема 1.** *Пусть $A$ –положительно- определенный самосопряжен - ный оператор, $A_{1,k}A^{-1}$ и $A_{2,k}A^{-2}$ $(k=1,\dots,n+1)$ ограниченные операторы в $H$ причем выполняется неравенство:*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \left( N_{1,k} \left\| A_{1,k}A^{-1}\right\|_{L_2} + N_2 \left\| A_{2,k}A^{-2}\right\| \right) < 1.$$

*Тогда задача (1)-(2) имеет единственное регулярное решение.*

**Доказательство.** Задачу (1)-(2) можем написать в виде уравнения

$$(P_0+P_1)u = f,\quad f\in L_2(R_{n+1}^+;H),\qquad u\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$$

Так как $P_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H) \to L_2(R_{n+1}^+;H)$ изоморфизм, то после замены $P_0 u = \vartheta$ получаем следующее уравнение в $L_2(R_{n+1}^+;H)$:

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)\vartheta = f$$

С другой стороны, для любого $\vartheta \in L_2(R_{n+1}^+;H)$ имеем:

$$\left\| P_1 P_0^{-1}\vartheta\right\|_{L_2} = \|P_1 u\|_{L_2} \le \sum_{k=1}^{n+1}\left( \left\| A_{1,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2} + \|A_{2,k}u\|_{L_2}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n+1}\left( \left\| A_{1,k}A^{-1}\right\| \left\| A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2} + \left\|A_{2,k}A^{-2}\right\| \left\|A^2 u\right\|_{L_2}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n+1} \left( N_{1,k}\left\| A_{1,k}A^{-1}\right\|_{L_2} + N_2\left\|A_{2,k}A^{-2}\right\|\right) \|P_o u\|_{L_2} = \alpha\|\vartheta\|_{L_2}$$

Так как $\alpha < 1$, то $u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right) f$ . Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что для нахождения условия разрешимости мы должны опеределить точные значения чисел.

$N_{1,k}$ и $N_2$ $(k=1,..,n+1)$. Имеет место следующая теорема

**Теорема 2.** *Для любого $k=1,..,n+1$ число $N_{1,k} = \dfrac{1}{2}$, а $N_2 = 1$.*

**Доказательство.** Умножая уравнение (1) скалярно на вектор $A^2u$, интегрируя по частям и учитывая, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ получаем

$$(P_0u, A^2u)_{L_2} = \sum_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, A^2u\right)_{L_2} + \left(A^2u, A^2u\right)_{L_2} = \sum_{k=1}^{n+1}\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2u\right\|_{L_2}^2 \quad (5)$$

Из неравенства (5), используя неравенство Юнга, при любом $\varepsilon > 0$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2u\right\|_{L_2}^2 \le \left\|P_0u\right\|_{L_2}\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \frac{\varepsilon}{2}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|A^2u\right\|_{L_2}^2. \quad (6)$$

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ из неравенства (6) находим, что

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{4}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2,$$

т.е. для любого $j=1,\dots,n+1$

$$\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\left\|P_0u\right\|_{L_2}$$

Следовательно, $N_{1,j} \le \frac{1}{2}$, $(j = 1,2,\dots,n+1)$.

При $\varepsilon = 1$ из неравенства (6) получаем:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 + \left\|A^2u\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}\left\|A^2u\right\|_{L_2}^2.$$

Следовательно,

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \left\|P_0u\right\|_{L_2},$$

т.е. $N_2 \le 1$.

Покажем, что $N_{1,j} = \frac{1}{2}$, $(j = 1,2,\dots,n+1)$ и $N_2 = 1$. Докажем верность равенства $N_{1,j} = \frac{1}{2}$. С этой целью, для любого $\varepsilon > 0$ построим вектор-функцию

$u_\varepsilon(x, x_{n+1}) = g_\varepsilon(x, x_{n+1})\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$ такую, что

$$E_j(u_\varepsilon) = \left\|P_0u\right\|_{L_2}^2 - (4+\varepsilon)\left\|A\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2}^2 < 0, \quad (7)$$

где скалярная функция $g_\varepsilon(x, x_{n+1}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+)$ и вектор $\varphi \in D(A^4)$ подлежат определению. Сперва предположив, что $g_\varepsilon(x, x_{n+1})\varphi \in \ \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+;H)$, неравенство (7), применяя теорему Парсевая, напишим в виде

$$E_j(u_\varepsilon) = \int\limits_{R_{n+1}} \left(\psi_j(\xi; A; \varepsilon)\varphi, \varphi\right)\left|\hat{g}_\varepsilon(\xi)\right|^2 d\xi,$$

где

$$\psi_j(\xi; A; \varepsilon) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k^2 E + A^2\right)^2 - (4+\varepsilon)\xi_j^2 A^2.$$

Если оператор А имеет собственное значение $\mu > 0$, т.е. $A\varphi = \mu\varphi$, $\left(\|\varphi\| = 1\right)$, то

$$E_j(u_\varepsilon) = \int\limits_{R_{n+1}} \psi_j\left(\xi; \mu; \varepsilon\right)\left|\hat{g}_\varepsilon(\xi)\right|^2 d\xi$$

Так как функция $\psi_j(\xi; \mu; \varepsilon) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k^2 + \mu^2\right)^2 - (4+\varepsilon)\xi_j^2 \mu^2 < 0.$ при $\xi_0 = (\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, \mu, 0, \dots, 0)$, то она, по непрерывности, отрицательна в некотрой окрестности $O(\xi_0)$ точки $\xi_0$. Далее определив достаточно гладкую функцию $\hat{g}_\varepsilon(\xi) = 0$ при $\xi \in R^{n+1} O(\xi_0)$, мы находим функцию $g_\varepsilon(x, x_{n+1})$ как преобразование Фурье функции $\hat{g}_\varepsilon(\xi)$. По теореме Пэли-Вннера функция $g_\varepsilon(\dot{x}, x_{n+1})$ принадлежит пространству $W_2^2(R^{n+1})$ . Далее, используя непрерывность функционала $E(u)$ из неравенства (7) в пространстве $W_2^2(R^{n+1})$, мы можем построить функцию $g_{\varepsilon,N}(x) \in W_2^2(R^{n+1})$, которая обращается в нуль в не параллелпипеда $[-N; N+1]^{n+1}$, для которого $E(g_{\varepsilon,N}\varphi) < 0$ .Далее, полагая $u_\varepsilon = g_\varepsilon(x, x_{n+1})\varphi = g_{\varepsilon,N}((x, x_{n+1})\varphi \in W_2^2(R^{n+1}; H)$,

Мы завешаем доказательство неравенства (7) для вектор- функции $u_\varepsilon(x, x_{n+1}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(R_{n+1}^+; H)$.

В обшем случае, когда оператор $A$ не имеет собственое значение, то для $\mu \in \sigma(A)$, используя спектральное разложение оператора $A$ всегда можно найти вектор $\varphi_\delta$ ($\|\varphi_\delta\| = 1$, $\delta > 0$ – любое положительное число), такой , что

$$A^m \varphi_\delta = \mu^m \varphi_\delta + 0(1), \text{ при } \delta \to 0, \ m = 1,2.$$

В этом случае, легко получаем, что

$$(\psi_j(\xi; A; \varepsilon)\varphi_\delta, \varphi_\delta) = \psi_j(\xi; \mu; \varepsilon) + 0(1), \text{ при } \delta \to 0.$$

Таким образом, повторяя рассуждения как в первом случае, мы завершаем доказательство теоремы.

Из теорем 1 и 2 получаем следующую основную теорему о разрешимости задачи (1)-(2).

**Теорема 3.** *Пусть $A$-положительно-определенный самосопряженный оператор, $A_{1,k}A^{-1}$, $A_{2,k}A^{-2}$ суть ограниченные операторы в $H$ $(k=1,...,n+1)$ и выполняется неравенство:*

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left\|A_{1,k}A^{-1}\right\|+\left\|A_{2,k}A^{-2}\right\|\right)<1$$

*Тогда задача (1)-(2) имеет единственное регулярное решение.*

## Литература


[1]. Гасымов М.Г. *К теории полиноминальных пучков операторов* Дан СССР, 1971, т. 199, №4, с.747-750.

[2]. Гасымов М.Т., Мирзоев С.С.*О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка* .Дифф. урав., 1992 т.28, №4, с.651-661.

[3]. Мирзоев С.С. *Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними.* Автореферат докторской диссертации Баку 1994, 32.

[4]. Мирзоев С.С. *Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений.* ДАН СССР, 1983, т. 273, №2, с. 292-295.

[5]. Дубинский Ю.А. *О некоторых дифференциально- операторных уравнениях произвольного порядка.*Матем. сбор.ник, 1973, т.90 (132), №1, с.3-22.

[6]. Шкаликов А.А. *Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними.* Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 14, с.140-224, 1989.

[7]. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.Мир. 1971, 371 с.

[8]. Асланов Г.И. *Вопросы теории разрешимости, полноты и асимптотики спектра для операторно-дифференциальных уравнений с частными произвольными в гильбертовом пространстве.* Автореферат докторской диссертации, Баку 1996, 34 с.

[9]. Асланов Г.И. *О дифференциальных уравнениях с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах.*Матем. заметки 1993, т. 53, вып 3, с 153-155.

[10]. Шахмуров В.Б.*Теоремы вложения абстрактных функциональных пространств и их приложения.* Матем сб. 1987, т.134(176), №2(10), с.260-272.

[11]. Шахмуров В.Б. *Коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для оператороно-дифференциальных уравнений в частных производных.* ДАН Аз ССР, 1978, №6, с.3-7.

**Mirzəyev S.S. İKİTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİALTƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA**

Məqalədə xüsusi törəməli ikinci tərtib elliptik tip operator- diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinin varlığı və yeganəliyi üçün yalnız tənliyin əmsalları vasitəsilə ifadə olunan şərtlər tapılmışdır.

**Mirzoyev S.S. ON ONE BOUNDARY PROBLEM FOR THE SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

The conditions of correct solvabity of the boundary problem for the elliptic type operator-differential equation in partial dervative of the second order are found in this paper. These conditions are expressed only in terms of the operator coefficients of considered equation.