УДК 517.53

МУСАЕВ К.М., ГАСАНОВА Т.Х.

ОБ АННУЛЯТОРАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Как известно (см. напр.[3]), для соотношений двойственности важным моментом является выбор основного нормированного пространства функций Е и нахождение ее аннулятороа $E^{\perp}$ т.е. нахождение совокупностей всех линейных функционалов обращающихся в нуль в пространстве Е.

В настояшей работе вводится подклассы обобщенных аналитических функций и находится их аннуляторы. Полученные результаты в дальнейшем необходимы установления соотношение двойственности в классе обобщенных аналитических функций.

Рассмотрим класс обобщенных аналитических функций в смысле И.Н. Векуа (см.[1] стр. 149) $U_{p,2}(A,B,G)$, т.е. класс регулярных решений уравнения

$$\partial_{\bar z}F(z)+A(z)F(z)+B(z)\overline{F(z)}=0, \qquad (1)$$

где

$$A(z),B(z)\in L_p(G), p>2, \partial_{\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Уравнение

$$\partial_{\bar z}F(z)+A(z)F(z)+\overline{B(z)F(z)}=0, \qquad (2)$$

называется сопряженным (см. [1] стр. 179) с уравнением (1). Класс регулярных решений ураванеия (2) будет обозначено через $U_{p,2}(-A,-\overline{B},G)$

Пусть область G ограничена и граница Γ спрямляемая кривая.

Определение. *Обобщенная аналитическая функция* $F(z)\in U_{p,2}(A,B,G)$ (или $F(z)\in U_{p,2}(-A,-\overline{B},G)$) принадлежит классу $E_\delta(A,B,G)$ (или $E_\delta(-A,-\overline{B},G)$, $\delta>0$) если существует последовательность спрямляемых кривых $\{\gamma_n\}\subset G, \{\gamma_n\}\to\Gamma$, таких , что

$$\int_{\gamma_n}|F(z)|^\delta|dz|\le C<\infty \qquad (3)$$

(С –независит от n).

Отметим, что если $\delta_1<\delta_2$, то

$$E_{\delta_1}(A,B,G)\supset E_{\delta_2}(A,B,G). \qquad (4)$$

Класс $E_\delta(A,B,G)$, $\delta>0$ является аналогом хорошо известных для аналитических функций класса E_δ (см.[2], стр. 203).

Заметим, что в качестве $\{\gamma_n\}$ (как это деоается в классе $E_\delta(G)$ – см.[2],стр.203) могут быть взяты образы окружностей $|W|=r_n$, $r_n<1$ при конформном отбражении круга $|W|<1$ на G. В дальнейщем это будем принимать во внимание.

Как известно (см. [1], стр. 157) всякая обобщенная аналититеская функция $F(z)\in U_{p,2}(A,B,G)$ (или $F(z)\in U_{p,2}(-A,-\overline{B},G)$) представляется в виде

$$F(z)=\Phi(z)e^{\omega(z)}, \qquad (5)$$

где *Ф(z)* аналитическая функция в G, $\omega(z)$ непрерывна всей конечной плоскости.

С помощью формулы (5) и в силу ограниченности $\omega(z)$ легко доказывается следующие утверждения:

1. Для того, чтобы обобщенная аналитическая функция *F(z)* принадлежала классу $E_\delta(A,B,G)$, $\delta>0$ необходимо и достаточно, чтобы в представлении (5) соответствующая аналитическая функция *Ф(z)* принадлежала в области G классу E_δ.
2. Если $F(z)\in E_\delta(A,B,G)$, $\delta>0$, то *F(z)* обладает угловыми граничными значениями *F(t)* почтитвезде на Γ и функция $|F(t)|^\delta$ суммируема на Γ.
3. Пусть область G принадлежит классу S- В.И.Смирнова (см.[2] стр. 250) и пусть $F(z)\in E_{\delta_1}(A,B,G)$.

Если $|F(t)|^{\delta_2}$ суммирема на Γ и $\delta_2<\delta_1$, то $F(z)\in E_{\delta_2}(A,B,G)$.

В самом деле в силу (5) имеем $\left|e^{\omega(z)}\right|\le C_1<+\infty$, $\left|e^{-\omega(z)}\right|\le C_2<+\infty$, во всей конечной плоскости. Поэтому

$$|F(z)|\le C_1|\Phi(z)|, \quad |\Phi(z)|\le C_2|F(z)|.$$

Эти соотношения доказывают утверждение 1.

Доказательство утверждения 2 следует из соответствующего свойства аналитической функции *Ф(z)* которая согласно первому утверждению входит в класс $E_\delta(G)$ (см. [2] стр. 203), а также из того, что функция $e^{\omega(z)}$ непрерывна во всей плоскости.

Так как $F(z)\in E_{\delta_1}(A,B,G)$ то в (5) $\Phi(z)\in E_{\delta_1}(G)$. Далее

$$\int_\Gamma |\Phi(t)|^{\delta_2}|dt|\le C_2^{\delta_2}\int_\Gamma |F(t)|^{\delta_2}|dt|<+\infty .$$

Следовательно, $|\Phi(t)|^{\delta_2}$ суммируема, поэтому по теореме В.И. Смирнова (см.[2] стр. 264) $\Phi(z)\in E_{\delta_1}$, т.е. $F(z)\in E_{\delta_1}(A,B,G)$, что завершает доказательство утверждение 3.

Теперь введем некоторые подклассы обобщенных аналитических функций.

1. Класс $E_\infty(A,B,G)$ – состоит из функций $F(z)\in U_{p,2}(A,B,G)$ для которых $\sup\limits_{z\in G}|F(z)|<\infty$.
2. $C(A,B,G)$ – подкласс $E_\infty(A,B,G)$ – состоит из непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$ функций.
3. Понадобится также вышеопределенный класс $E_\delta(A,B,G)$ при $\delta>1$.

Введя нормы в прстранствах $E_\infty(A,B,G)$, $C(A,B,G)$, $E_\delta(A,B,G)$ соответственно через

$$\|F\|=vrai\max_{z\in\Gamma}|F(z)|=\max_{z\in G}|F(z)|,\quad \|F\|=\left(\int_\Gamma|F(t)|^\delta|dt|\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

их можно превратить в нормированное пространство.

Пусть теперь G конечная область, а граница Γ κ-кривая (см. напр.[5]), т.е. $\forall z_1,z_2\in\Gamma,\ \exists k>0: l(z_1,z_2)\le k|z_1-z_2|$.

Теорема 1. *Пространства* $E_\infty^\perp(A,B,G), C^\perp(A,B,G)$ и $E_\delta^\perp(A,B,G)$ состоят из совокупностей всех линейных функционалов вида

$$\mathcal{L}(F)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_\Gamma F(t)F_1(t)dt\right),$$

где в случае $E_\infty^\perp(A,B,G): F(z)\in E_\infty(A,B,G)$, в случае $C^\perp(A,B,G): F(z)\in C(A,B,G)$ в обоих этих случаях $F_1(z)\in E_1(-A,-\overline{B},G)$, а в случае: $E_\delta^\perp(A,B,G)$ $F(z)\in E_\delta(A,B,G)$ и $F_1(z)\in E_{\delta_1}(-A,-\overline{B},G)$, причем $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}=1$.

Доказательство. Докажем теорему относительно пространства. $E_\delta^\perp(A,B,G)$. Отметим, что $E_\delta(A,B,G)$ вещественное нормированное пространство.

Пусть $X=\{x\}$ комплексное нормированное пространство функций, а X_R тоже самое пространство, рассматриваемого как вещественное.

Тогда произвольный линейный функционал $l_1(x)$ над X_R задается формулой

$$l_1(x)=\mathrm{Re}\,l(x),$$

где $l(x)$ некоторый (произвольный) линейный функционал над X (см.[4] стр. 139).

Пространство $E_\delta(A,B,G)$ можно считать подпространством $\mathcal{L}_{\delta,R}(\Gamma)$ – вещественного линейного пространства всех суммируемы на Γ функций $f(t)$ со степенью δ, с обычной нормой

$$\|f\| = \left(\int_\Gamma |f(t)|^\delta |dt| \right)^{1/\delta}.$$

Поэтому любой линейный функционал $l(x)$ над $\mathcal{L}_{\delta,R}(\Gamma)$ – имеет вид

$$\mathcal{L}(f) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i} \int_\Gamma f(t)\psi(t)dt \right),$$

где произвольная (фиксированная) суммируемая функция на Γ (множитель $1/2i$ нами написаная для удобства).

Покажем, что если $F_1(z) \in E_{\delta_1}(A,B,G)$, $F_2(z) \in E_{\delta_2}(-A,-\overline{B},G)$, $\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} = 1$, то $\mathrm{Re}\left(\int_\Gamma F_1(z)F_2(z)dz \right) = 0.$

Обозначим через G_n образ круга $|w| < r_n, r_n < 1$ при конформном отображенеии $z = \varphi(w)$ единичного круга $|w| < 1$ на G. Пусть γ_n – граница G_n, т.е. образ окуружности $|w| = r_n$. Представим $F_1(z), F_2(z)$ по формуле (5):

$$F_1(z) = \Phi_1(z)\exp\omega_1(z), \quad F_2(z) = \Phi_2(z)\exp\omega_2(z).$$

В силу утверждения 1 $\Phi_1(z) \in E_{\delta_1}(G), \Phi_2(z) \in E_{\delta_2}(G)$, поэтому (см. [2] стр.203)

$$\int_{\gamma_n} |\Phi_1(z)|^{\delta_1} |dz| \le C_3 < +\infty, \quad \int_{\gamma_n} |\Phi_2(z)|^{\delta_2} |dz| \le C_4 < +\infty,$$

Имеем

$$\int_{\gamma_n} |\Phi_1(z)\Phi_2(z)||dz| \le \left(\int_{\gamma_n} |\Phi_1(z)|^{\delta_1} |dz| \right)^{\frac{1}{\delta_1}} \left(\int_{\gamma_n} |\Phi_2(z)|^{\delta_2} |dz| \right)^{\frac{1}{\delta_2}} < \infty,$$

т.е. $\Phi_1(z)\Phi_2(z) \in E_1(G)$.

Далее имеем:

$$F_1(z)F_2(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z)(\exp\omega_1(z)\exp\omega_2(z)) = \Phi(z)\Omega(z),$$

где через $\Omega(z)$ обозначено $\Omega(z) = \exp(\omega_1(z) + \omega_2(z))$, а через $\Phi(z)$ обозначено $\Phi(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z)$.

Так как $F_1(z)$ и $F_2(z)$ регулярные решения уравнения (1) и (2) соответственно, то они непрерывны на G и поэтому на $\overline{G}_n$ $(\overline{G}_n \subset G)$ (см.[1] стр. 180)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i} \int_\Gamma F_1(z)F_2(z)dz \right) = 0.$$

Так как $\Phi(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z) \in E_1(G)$, то $\Phi(\varphi(w)\varphi'(w) \in H_1$ (см. [2] стр. 203) имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\left|\Phi(\varphi(r_ne^{i\theta}))\varphi'(r_ne^{i\theta})-\Phi(\varphi'(r_ne^{i\theta}))\varphi(r_ne^{i\theta})\right|d\theta \underset{(r_n\to 1)}{\Rightarrow} 0\\&\int_0^{2\pi}\left|\Phi(\varphi(e^{i\theta}))\varphi'(e^{i\theta})\right|d\theta<+\infty\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

В силу непрерывности $\Omega(z)$ на $\overline{G}$ (и на $\overline{G}_n$)

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\left|\Omega\left(\varphi\left(r_ne^{i\theta}\right)\right)-\Omega\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|d\theta \underset{(r_n\to 1)}{\Rightarrow} 0\\&\int_0^{2\pi}\left|\Omega\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta<+\infty\end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Рассмотрим следующую разность и докажем, что при $n\to\infty (r_n\to 1)$

$$\lim\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz\right)-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}F_1(z)F_2(z)dz\right)\right)=0.$$

Отображая G на единичный круг, после небольших преобразований учитывая (6) и (7) получим

$$\lim_{r_n\to 1}\left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz\right)-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz\right)\right|=$$

$$=\lim\left|\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz-F_1(z)F_2(z)dz\right)\right|\le$$

$$\le\lim\left|\left(\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz\right)-\left(\int_{\Gamma}F_1(z)F_2(z)dz\right)\right|=$$

$$=\lim\left|\int_{\gamma_n}\Phi(z)\Omega(z)dz-\int_{\Gamma}\Phi(z)\Omega(z)dz\right|=$$

$$=\lim\left|\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi(r_ne^{i\theta}))\varphi'(r_ne^{i\theta})\Omega(\varphi(r_ne^{i\theta}))r_ne^{i\theta}d\theta-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi(e^{i\theta}))\varphi'(e^{i\theta})\Omega(\varphi(e^{i\theta}))e^{i\theta}d\theta\right|\le$$

$$\le\lim{}_n\left[r_n\int_0^{2\pi}\left|\Phi(\varphi(r_ne^{i\theta}))\varphi'(r_ne^{i\theta})\right|-\Phi(\varphi(e^{i\theta})\varphi'(e^{i\theta})\left|\Omega(\varphi(e^{i\theta}))\right|d\theta+\right.$$

$$+r_n\int_0^{2\pi}\left|\Omega(\varphi(r_ne^{i\theta}))-\Omega(\varphi(e^{i\theta})\right|\left|\Phi(\varphi(e^{i\theta})\varphi'(e^{i\theta}))\right|d\theta+$$

$$+(1-r_n)\int_0^{2\pi}\left|\Phi\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)\varphi'\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|\Omega\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|d\theta\ \Bigg] = 0$$

Это значит, что

$$0=\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_n}F_1(z)F_2(z)dz=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}F_1(z)F_2(z)dz\right)\right).$$

Утверждение теорема относительно пространства $E_\delta^\perp(A,B,G)$ закончено, Доказательство теорем для пространств $E_\infty^\perp(A,B,G)$ и $C(A,B,G)$ приводится аналогично.

Теорема 2. *Пусть область G конечная, а граница Г к-кривая и входит в класс S- В.И. Смирнова. $\varphi(t)$ суммироемая функция на Г, такая, что для любой обобщенной аналитической функции F(z) из класса $E_\delta(A,B,G)$ существует*

$$\int_\Gamma F(t)\varphi(t)dt \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i}\int_\Gamma F(t)\varphi(t)dt\right)=0. \qquad (8)$$

Тогда $\varphi(t)$ представляет собой граничные значение некоторой обобщенной аналитической функции $F_1(z)\in E_{\delta_1}(-A,-\overline{B},G)$, $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta_1}=1$.

Доказательство. Так как (8) имеет место для всех непрерывных в $\overline{G}$ решений уравнения (1) $\left(C(A,B,G)\subset E_\delta(A,B,G)\right)$, то по теореме 1 (см.[6]) $\varphi(t)$ представляет собой граничные значения некоторой функции $F_1(z)\in E_1(-A,-\overline{B},G)$.

Покажем, что

$$\int_\Gamma |\varphi(t)|^{\delta_1}|dt|<+\infty, \qquad (9)$$

Тогда по утверждению 1 будет $F_1(z)\in E_{\delta_1}(-A,-\overline{B},G)$ (т.к. $\delta_1>1$) Для этого достаточно показать, что для любого $\rho(t)\geq 1$ удовлетворящего

$$\int_\Gamma \rho(t)^\delta\,|dt|<+\infty, \qquad (10)$$

будет справедливо

$$\int_\Gamma \rho(t)|\varphi(t)||dt|<+\infty. \qquad (11)$$

Нетрудно убедиться в том, что взяв такую функцию $\rho(t)\geq 1$ и используя результаты теории граничных значений аналитических функций, всегда можно пстроить аналитическую функцию $\Phi(z)$ входящую в $E_\delta(G)$ для которой $\rho(t)=|\Phi(t)|$.

По функции $\Phi(z)$ с помощью формулы (5) строим обобщенную аналитическую функцию $F(z)$. Согласно утверждение 1 $F(z)\in E_\delta(A,B,G)$. Поэтому $\int_\Gamma F(t)\varphi(t)dt$ существует, а тогда

$$\int_{\Gamma}|\Phi(t)\varphi(t)dt| = \int_{\Gamma}\rho(t)|\varphi(t)||dt| < +\infty.$$

Таким образом, (11) установлено. Область G входит в класс S В.И.Смирнова, то входя в $E_1(-A,-\overline{B},G)$ и имея граничные значения удовлетворяющего (9) входит в $E_1(-A,-\overline{B},G)$.

Доказательство завершено.

Литература

[1]. Векуа И.Н.*Обобщенные аналитические функции* .М.Н., 1959, 627 с.
[2]. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.Н., 1950, 336 *с.*
[3]. Хавинсон С.Я. *Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций.*-Матем. сб., 36(78):3(1955), с.445-478.
[4]. Конторович Л.В., Акилов Г.П. *Функсиональный анализ в нормированных пространствах.*-М., 1959, 684 с.
[5]. Мамедханов Дж.И.*Некоторых интегральные неравенства многочленнов на кривых.* –Сб.Специальные вопросы теории функции, вып.4 Б+аку, 1989.
[6]. Мусаев К.М.,Гасанова Т.Х. *О граничных свойствах сопряженных классов обобщенных аналитических функций.*-Труды ИММ АН Азерб, Респ., посвящ. 50-летию АН .Баку, 1995, с.165-169.

Musaev K.M., Qasanova T.X.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALARIN BƏZİ SİNİFLƏRİNİN ANNULYATORLARI HAQQINDA

Məqalədə ümumiləşmiş analitik funksiyaların bir sırı sinifləri təyin olunur və onların annuliyatorları, başqa sözlə həmin siniflərdə sıfra çevrilən bütün xətti funksionallar çoxluöu tapılır.

Musaev K.M., Gasanova T.X.

ON ANNIHILATORS OF SOME CLASSES OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

We consider a class of generalized analytic functions in I.N.Veekua sense. There are deined some subclasses. Annihilators are constructed in the paper, i.e. a form of linear functional vanishiny in the constidered class of generalized analytic functions is found.