1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.43

ОРУДЖЕВ Э.Г.

К СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОЛИНОМИАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе некоторые результаты исследований М.Г. Гасымова, полученные в статье [1] для дифференциальных уравнений с двухчленными старшими коэффициентами по спектральному параметру и с периодическими коэффициентами, обобщаются на случай дифференциальных уравнений, содержащих спектральный параметр в виде многочлена. А именно, рассматривается в $L_2(-\infty,\infty)$ дифференциальный оператор L, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv Y^{(2n)}(x) + \sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l} P_{lk}(x)\lambda^k\right)Y^{(2n-l)}(x), \tag{1}$$

где P_{ll} - действительные числа, а функции

$$P_{lk}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{lkm} e^{imx}, \quad l=\overline{1,2n}, \quad k=\overline{0,l-1} \tag{2}$$

в предположении, что ряды

$$\sum_{l=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty} m^l |P_{lkm}|, \tag{3}$$

сходится. Еще будем предполагать, что корни $\theta_\nu,\ \nu=\overline{1,2n}$ характеристического уравнения

$$F(\theta) = \theta^{2n} + P_{11}\theta^{2n-1} + \ldots + P_{2n-1,2n-1}\theta + P_{2n,2n} = 0. \tag{4}$$

различны, отличны от нуля и такие, что при подходящего их нумерации, плоскость λ делится на секторы $R_k,\ k=\overline{0,4n-1}$ в каждом из которых выполняется неравенства $\operatorname{Re}\lambda\theta_1 \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda\theta_n \le 0 \le \operatorname{Re}\lambda\theta_{n+1} \le \ldots \operatorname{Re}\lambda\theta_{2n}$. Решение уравнения $l(y)=0$, найденная здесь, представляет собой произведение решений этого уравнения только со старшими по параметру коэффициентами и некоторой мероморфной периодической функцией. Рассмотрение дифференциального выражения вида $\sum\limits_{i+j\le 2n} P_{ij}\lambda^j Y^{(j)}(x)$ с постоянными коэффициентами $P_{ij},\ j>0$ и периодическими коэффициентами $P_{l0}(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_{l0m}e^{imx},\ l=\overline{1,2n}$ не вызывает существенно новых затруднений. Придется фундаментальные решения $\exp(\theta_i \lambda x)$ заменить решениями, имеющими подобный асимптотическийвид при $\lambda \to \infty$. Однако, случай переменных непериодических коэффицентов P_{ij} даже в младшей части должен быть рассмотрен особо.

Здесь приводятся и некоторые результаты исследований в случай пары мнимых $\pm i$ кратных корней характеристического уравнения *(4)*.

1. Специальные решения уравнения $l(y)=0$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (2), (3). Тогда дифференциальное уравнение $l(y)=0$ в каждом секторе R_k, $k=\overline{0,4n-1}$ имеет фундаментальные системы решений, представимые в виде*

$$Y_\nu(x,\lambda)=e^{\theta_\nu \lambda x}+\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\frac{U_{ms}^{j}(\lambda)e^{(\theta_\nu\lambda+is)x}}{im\left[\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{(im)^k}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\theta_\nu)\lambda^{2n-1-k}\right]},\quad \nu=\overline{1,2n},\tag{5}$$

где, $U_{ms}^{j}(\lambda)=\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}U_{ms\nu}^{j}\lambda^{2n-1-\nu}$ *коэффициенты* $U_{ms\nu}^{j}$ *однозначно определяются через* P_{lkm}, *причем ряды*

$$\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{s=m}^{\infty}s^j\left|U_{ms\nu}^{j}\right|\tag{6}$$

сходятся, функции $Y_\nu(x,\lambda)$, *а также производные* $Y_\nu^{(k)}(x,\lambda)$, $k=\overline{1,2n-1}$ *являются непрерывными функциями по совокупности переменных* (x,λ) *для* $x\in(-\infty,\infty)$, $\lambda\in R_k$, $k=\overline{0,4n-1}$ *и все* $Y_\nu^{(k)}(x,\lambda)$, $k=\overline{1,2n-1}$ *оказывается мероморфными функциями по* λ, *полюсы которого являются корни уравнения*

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(im)^k}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\theta_\nu)\lambda^{2n-1-k}=0.\tag{7}$$

Доказательство. Сначала выделим главные члены по параметру λ уравнения $l(y)=0$:

$$Y^{(2n)}(x)+\sum_{l=1}^{2n}P_{ll}\lambda^l Y^{(2n-l)}(x)+\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}P_{lk}(x)\lambda^k\right)Y^{(2n-l)}(x)=0,\tag{8}$$

Ищем частное решение $Y_\nu(x,\lambda)$, $\nu=\overline{1,2n}$ уравнения *(8)* в виде:

$$Y=e^{\theta_\nu\lambda x}+\sum_{s=1}^{\infty}a_s(\lambda)e^{(\theta_\nu\lambda+is)x},\tag{9}$$

Для определения неизвестной функции $a_s(\lambda)$ подставим *(9)*в *(8)*. Сокращая обе части на $\exp(\theta_\nu\lambda x)$, поменяя порядок суммирования по m и s, учитывая то, что превращается в нуль главный член, формально, получим:

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{m=1}^{\infty}P_{lkm}\lambda^k e^{imx}\right)(\theta_\nu\lambda)^{2n-l}+\sum_{s=1}^{\infty}a_s(\lambda)(\theta_\nu\lambda+is)^{2n}e^{isx}+$$

$$+\sum_{l=1}^{2n} P_{ll}\lambda^l \sum_{s=1}^{\infty} (\theta_\nu \lambda + is)^{2n-l} a_s(\lambda) e^{isx} + \sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\lambda^k \sum_{m=1}^{\infty} P_{lkm} e^{imx}\right)\times$$

$$\times \sum_{s=1}^{\infty} a_s(\lambda)(\theta_\nu \lambda + is)^{2n-l} e^{isx} = 0. \qquad (10)$$

Отсюда имеем

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(\theta_\nu\lambda)^{2n-1}\lambda^k \sum_{m=1}^{\infty} P_{lkm} e^{imx}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\lambda)(\theta_\nu\lambda + im)^{2n} e^{imx} +$$

$$+\sum_{l=1}^{2n} P_{ll}\lambda^l \sum_{m=1}^{\infty}(\theta_\nu\lambda + im)^{2n-l} a_m(\lambda) e^{imx} +$$

$$+\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\lambda^k \sum_{\substack{r+N=m \\ r,N<m}} P_{lkr} a_N(\lambda)(\theta_\nu\lambda + iN)^{2n-l} e^{imx}\right) = 0. \qquad (11)$$

Сравнивая коэффициенты при e^{imx}, $m = 1,2,\ldots$ получим:

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(\theta_\nu\lambda)^{2n-l}\lambda^k P_{lkm}\right) + a_m(\lambda)\left[(\theta_\nu\lambda + im)^{2n} + \sum_{l=1}^{2n} P_{ll}\lambda^l (\theta_\nu\lambda + im)^{2n-l}\right] +$$

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{l-1}\lambda^k \sum_{r+N=m} P_{lkr} a_N(\lambda)(\theta_\nu\lambda + iN)^{2N-l}\right) = 0, \quad r, N < m, \qquad (12)$$

Отсюда

$$a_m(\lambda) = -\left[(\theta_\nu\lambda + im)^{2n} + \sum_{l=1}^{2n} P_{ll}\lambda^l(\theta_\nu\lambda + im)^{2n-l}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\sum_{l=1}^{2n}\sum_{k=0}^{l-1}\lambda^k\left(\sum_{r+N=m} P_{lkr} a_N(\lambda)(\theta_\nu\lambda + iN)^{2n-l} + (\theta_\nu\lambda)^{2n-l} P_{lkm}\right)\right]. \qquad (13)$$

Из *(13)* последовательно определяются функции $a_1(\lambda),\ldots,a_m(\lambda)$ и каждая рациональная функция $a_m(\lambda)$ является суммой m рациональных функций

$$a_m(\lambda) = \sum_{s=1}^{m} U_{ms}(\lambda). \qquad (14)$$

Подставляя *(13)* в *(9)* и учитывая *(14)* после несложных преобразований приходим к формальному решению *(5)*.

Используя технику работы [2], получим, что эти формальные решения асимптотически сходятся к решению уравнения *(1)* в секторе R_k.

Аналогичным образом для кратных корней уравнения *(4)* придем к теореме:

Теорема 2. *При условии (2), (3) дифференциальное уравнение*

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^n Y + \sum_{\gamma=0}^{2n-1} P_\gamma(x) Y^{(\gamma)} = 0, \qquad (15)$$

где $P_\gamma(x)=\sum_{m=1}^{\infty}P_{\gamma m}e^{imx}$ *в каждой из полуплоскостей* $\pi_\pm=\{\lambda:\pm\operatorname{Im}\lambda\ge 0\}$ *имеет фундаментальные системы решений, допускающие представление вида*

$$Y_k^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left[x^k+\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+2\lambda)^n}\sum_{s=m}^{\infty}U_{ms}^{jj}(\lambda)e^{isx}\right],\ k=\overline{0,n-1}, \qquad (16)$$

где $U_{ms}^{jj}(\lambda)=\sum_{\nu=0}^{2n-1}U_{ms\nu}^{jj}\lambda^{2n-1-\nu}$ *ряды*

$$\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^n}\sum_{s=m}^{\infty}\left|U_{ms\nu}^{jj}\right|s^j \qquad (17)$$

сходятся, функции $Y_k^{\pm(r)}(x,\lambda)$, $r=\overline{0,2n-1}$, $k=\overline{0,n-1}$ *являются непрерывными функциями по совокупности переменных* (x,λ), $x\in(-\infty,\infty)$, $\lambda\in\pi_\pm$ *мероморфны по* λ, *которые могут иметь полюсы порядка* n *в точках* $\lambda=-\dfrac{m}{2}$, $m=1,2,\ldots$.

Пусть теперь $l^*(z)$- сопряженное к $l(y)$ дифференциальное выражение

$$l^*(z)\equiv z^{(2n)}+\sum_{l=1}^{2n}(-1)^l\left(\overline{\sum_{k=0}^{l}P_{lk}(x)\overline{\lambda}^k z}\right)^{2n-l}, \qquad (18)$$

где $\overline{P_{lk}(x)}=\sum_{m=1}^{\infty}P_{lkm}e^{-imx}$. Характеристическое уравнение для сопряженного уравнения $l^*(z)=0$ имеет вид

$$\omega^{2n}-P_{11}\omega^{2n-1}+P_{22}\omega^{2n-2}-\cdots-P_{2n-1,2n-2}\omega+P_{2n,2n}=0\ , \qquad (19)$$

Нетрудно проверить, что уравнение $l^*(z)=0$ и уравнение сопряженное к *(15)* имеют фундаментальные решения, допускающие представления

$$Z_\nu(x,\lambda)=e^{-\theta_\nu\overline{\lambda}x}-\sum_{j=1}^{2n}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\frac{R_{ms}^{j}(\overline{\lambda})e^{-(\theta_\nu\overline{\lambda}+is)x}}{im\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(im)^k}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\theta_\nu)\overline{\lambda}^{2n-1-k}\right]},\quad \nu=\overline{1,2n}, \qquad (20)$$

и

$$Y_k^{\mp}(x,\lambda)=e^{\mp i\lambda x}\left[x^k-\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+2\overline{\lambda})^n}\sum_{s=m}^{\infty}R_{ms}^{jj}(\overline{\lambda})e^{-isx}\right],\ k=\overline{0,n-1}, \qquad (21)$$

в секторах R_k и полуплоскостях $\pi_\pm$ соответственно. При этом ряды типа *(6)* и *(17)* при замене $U_{ms\nu}^{j}$ и $U_{ms\nu}^{jj}$ на $R_{ms\nu}^{j}$ и $R_{ms\nu}^{jj}$ сходятся.

2. Спектр и резольвента оператора L.

Легко устанавливается, что никакая нетривиальная линейная комбинация решений *(5)* уравнения $l(y)$ не принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$. Отсюда вытекает, что оператор L не имеет собственных значений.

Пусть $\lambda \in R_k$. При $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ ищем решение уравнения $l(y)=f$, принадлежащее пространству $L_2(-\infty,\infty)$ в виде:

$$Y(x,\lambda)=\sum_{r=1}^{2n} C_\nu(x,\lambda)Y_\nu(x,\lambda). \tag{22}$$

Применяя метод вариации постоянных для определения $C_\nu(x,\lambda)$ находим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C'_\nu(x,\lambda)Y_\nu^{(k)}(x,\lambda)=0, \quad k=\overline{0,2n-2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C'_\nu(x,\lambda)Y_\nu^{(2n-1)}(x,\lambda)=f(x). \tag{23}$$

Из *(23)* находим, что

$$C'_\nu(x,\lambda)=\frac{(-1)^\nu W_\nu(Y_1,\ldots,Y_{\nu-1},Y_{\nu+1},\ldots,Y_{2n})}{W(Y_1,\ldots,Y_{2n})}f=A_\nu(\lambda)Z_\nu(x,\lambda)f, \tag{24}$$

где $W(Y_1,\ldots,Y_{2n})$ Вронскиан системы $Y_\nu(x,\lambda)$, а W_ν - алгебраическое дополнение элемента $Y_\nu^{2n-1}(x,\lambda)$ в W, $A_\nu(\lambda)$, $\nu=\overline{1,2n}$ некоторые функции от λ, не зависящие от x и допускающие представление вида $O\left(\frac{1}{\lambda^{2n-1}}\right)$.

Отсюда имеем

$$C_\nu(x,\lambda)=C_\nu+A_\nu(\lambda)\int_{\mp\infty}^{x} Z_\nu(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \qquad \begin{matrix} \textit{знак} - & \textit{при } \nu=\overline{1,n} \\ \textit{знак} + & \textit{при } \nu=\overline{n+1,2n} \end{matrix} \tag{25}$$

Из выражений $Y_\nu(x,\lambda)$ и $Z_\nu(x,\lambda)$ вытекает, что при $\lambda \neq \lambda_{mk}$, где λ_{mk} - корни уравнения *(6)*, и $\lambda \in R_k$

$$|Y_\nu(x,\lambda)|\in L_2(0,\infty), \quad |Z_\nu(x,\lambda)|\in L_2(-\infty,0), \quad |Y_\nu(x,\lambda)| \,\overline{\in}\, L_2(0,\infty),$$

$$|Z_\nu(x,\lambda)| \,\overline{\in}\, L_2(-\infty,0),\ \nu=\overline{1,n}; \quad |Y_\nu(x,\lambda)|\in L_2(-\infty,0), \quad |Z_\nu(x,\lambda)|\in L_2(0,\infty),$$

$$|Y_\nu(x,\lambda)| \,\overline{\in}\, L_2(0,\infty), \quad |Z_\nu(x,\lambda)| \,\overline{\in}\, L_2(-\infty,0),\ \nu=\overline{n+1,\,2n}.$$

Учитывая эти свойства и $Y(x,\lambda)\in L_2(-\infty,\infty)$, с учетом *(25)*, находим, что для финитных $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$

$$C_\nu(\lambda)=A_\nu(\lambda)\int_{-\infty}^{0} Z_\nu(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \qquad \nu=\overline{1,n},$$

$$C_\nu(\lambda)=-A_\nu(\lambda)\int_{0}^{\infty} Z_\nu(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \qquad \nu=\overline{n+1,2n}. \tag{26}$$

Окончательно получим

$$Y(x,\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(\lambda)Y_\nu(x,\lambda)\int_{-\infty}^{x}Z_\nu(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi-$$

$$-\sum_{\nu=n+1}^{2n}A_\nu(\lambda)Y_\nu(x,\lambda)\int_{x}^{\infty}Z_\nu(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi. \qquad (27)$$

Соотношение *(27)* определяет некоторый ограниченный оператор в $L_2(-\infty,\infty)$ с ядром

$$R(x,\xi,\lambda)=A_\nu(\lambda)\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{n}Y_\nu(x,\lambda)Z_\nu(\xi,\lambda), & \xi<x\\ -\sum_{\nu=n+1}^{2n}Y_\nu(x,\lambda)Z_\nu(\xi,\lambda), & \xi\ge x\end{cases} \qquad (28)$$

более того, ядро удовлетворяет условиям типа Карлемана, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(x,\xi,\lambda)|^2d\xi<\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|R(x,\xi,\lambda)|^2dx<\infty, \qquad (29)$$

Аналогичным образом получается представление ядра опреатора, построенное соответственно к *(15)*, с тем различием, что $A_\nu(\lambda)$ будет вести себя, как $O\left(\frac{1}{\lambda^{2n-2}}\right)$.

Таким образом, приходим к следующему утверждению:

Теорема 3. *Оператор L имеет чисто непрерывный спектр, лежащие на прямой* $\mathrm{Re}\lambda\theta_n=0$, *где могут быть спектральные особенности, которые являются корнями уравнения (6). А для оператора, построенная соответственно к (15) непрерывный спектр заполняет положительную полуось* $\lambda\ge 0$, *а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности порядка* $2n$, *совпадающие с точками* $\lambda=\frac{m}{2}$, $m=1,2,\dots$.

Литература

[1]. Гасымов М.Г. *Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами.* ДАН СССР, 252, 2, 1980, с.277-280.

[2]. Оруджев Э.Г. *Асимптотические разложения решений линейных дифференциальных уравнений,зависящих сложным образом от двух параметров.* Вестник Бакинского Университета, 1992, 1, с.138-152.

Orucov E.Q.

SPEKTRAL PARAMETRDƏN ÇOXHƏDLİ ŞƏKLİNDƏ ASILI, PERİODİK ƏMSALLI ADİ DİFFERENSİAL OPERATORLARIN SPEKTRAL ANALİZİNƏ DAİR

Məqalədə $L_2(-\infty,\infty)$ fəzasında cüt tərtibli differensial operatorlara baxılır. Xüsusi şəkildə qurulmuş meromorf həllərə nəzərən rezolventanın ifadəsi verilir. Göstərilir ki, baxılan operatorlar xususi həllərin polyuslarını özündə saxlayan kəsilməz spektrlər oxuna malikdir.

Orudzhev E.G.

TO SPECTRAL ANALYSIS OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS POLYNOMIALLY DEPENDING ON A SPECTRAL PARAMETER WITH PERIODIC COEFFICIENTS

In the space $L_2(-\infty,\infty)$ even order differential operators are considered in the paper. The expression of a resolvent on specially constructed meromorphic solutions is described. It is indicated that considered operators have the axes of continuous spectra containing the poles of special solutions.