УДК 517.

ПАШАЕВ Р.Т.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПУЧКА ШТРУМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} \lambda y, & a < x < b \\ -\dfrac{1}{\lambda} y, & 0 < x < a, \end{cases} \tag{1}$$

в котором $q(x)$ $(0 \le x \le b)$ действительная непрерывная функция. Присоединим к уравнению (1) краевые условия

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{2}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(b) = 0, \tag{3}$$

где $h$ – действительное число. Обоначим через $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ собственные значения краевых задач (1), (2) и (1), (3) соответсвенное.

Далее, обозначим через $\varphi(x,k), \psi(x,k)$ $(\lambda = k^2)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0,k) = 1, \quad \varphi'(0,k) = h, \quad \psi(0,k) = 0, \quad \psi'(0,k) = 1$$

Собственные значения краевых задач (1), (2) и (1), (3) совпадают соответственно с нулями функций

$$\begin{aligned} \Phi_1(k) &= \varphi(b,k) \\ \Phi_2(k) &= \varphi'(b,k) \end{aligned} \tag{4}$$

В настояшей работе ставится задача об определении функции $q(x)$, числа $h, H_1$ и $H_2$ по двум спектрам $\{\lambda_n\}$и $\{\mu_n\}$. Имеет место

**Теорема.** *Функция $q(x)$ и числа $h$ определяются единственным образом по заданным спектрам* $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу на полуоси:

$$-y'' + \tilde{q}(x)y = \begin{cases} k^2 y, & a < x < +\infty \\ -\dfrac{1}{k^2} y, & 0 < x \le a, \end{cases} \tag{5}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{6}$$

где

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x), & 0 < x < b \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Выведем формулу, с помощью которой можно определить данные рассеяния задачи (5), (6) по известным двум спектрам $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ задач (1), (2) и (1), (3). Тем самым решение обратной задачи по двум спектрам будет смведено к уже иследованной обратной задаче по данным рассеяния (см. [1] , [2]).

Обозначим через $f(x,k)$ решение уравнения (5) с условием

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1$$

**Лемма:** *Имеет место формула*

$$f'(0,k) - hf(0,k) = \frac{1}{h}e^{ikb}\{\varphi'(b,k) - ik\varphi(b,k)\}, \qquad (7)$$

**Доказательство:** Так как функции $\varphi(x,k)$ и $\psi(x,k)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (5), то решение $f(x,k)$ этого же уравнения равно их линейной комбинации:

$$f(x,k) = c_1\varphi(x,k) + c_2\psi(x,k)$$

Поскольку потенциал $\tilde{q}(x)$ равен нулю при $x > b$, то $f(x,k) = e^{ikx}$ при $x \ge b$ и в точке $x = b$ должны выполняься равенства

$$e^{ikb} = c_1\varphi(b,k) + c_2\psi(b,k),$$

$$ike^{ikb} = c_1\varphi'(b,k) + c_2\psi'(b,k),$$

из которых определьяются коэффициенты $c_1$ и $c_2$:

$$c_1 = h^{-1}e^{ikb}\{ik\psi(b,k) - \psi'(b,k)\}, \quad c_2 = h^{-1}e^{ikb}\{\varphi'(b,k) - ik\varphi(b,k)\}$$

Следовательно, имеем

$$f(x,k) = h^{-1}e^{ikb}\{[ik\psi(b,k) - \psi'(b,k)]\varphi(x,k) + [\varphi'(b,k) - ik\varphi(b,k)]\psi(x,k)\}$$

Отсюда Легко получимь формулу (7).

Известно, что функция рассеяния задачи (5), (6) имеет вид ([1], [2])

$$S(k) = \frac{f'(0,-k) - hf(0,-k)}{f'(0,k) - hf(0,k)}.$$

Поэтому в силу (7) получим

$$S(k) = \frac{\varphi'(b,k) + ik\varphi(b,k)}{\varphi'(b,k) - ik\varphi(b,k)}e^{-2kbi}.$$

С другой стороны из соотношений (4) следует, что

$$S(k) = e^{-2kbi}\frac{\Phi_2(k) + ik\Phi_1(k)}{\Phi_2(k) - ik\Phi_1(k)} \qquad (8)$$

$$F(k) \equiv f'(0,k) - hf(0,k) = \Phi_2(k) - ik\Phi_1(k).$$

Стандартным методом доказывается, что $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ перемежаются, поэтому приращение аргумента функции *F(x)* на всей оси равно нулью (см.[3]).Следовательно, *F(x)* не имеет нулей в верхной полуплоскости, т.е. задача (5), (6) не имеет собственные значения. Таким образом данные рассеяние задачи (5), (6) состоит только из *S(k)* функций. С другой строны, в работе [2] доказана, что задача (5), (6), т.е. функция $\tilde{q}(x)$ и число $h$, однозначно определяются по данным рассеяния. Так как *S(k)* однозначно определяются по $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ (см.формулу (7)), отсюда получаем, что и функция $q(x)$ и число $h$ однозначно определяются по двум спектрам.

## Литература


[1]. Гасымов М.Г., Пашаев Р.Т. *Об одном жробнолинейном пучке дифференциальных операторов типа Штрума-Лиувилля.* Докл. АН СССР, 1987, т.294, № 5, с1041-1044.

[2]. Пашаев Р.Т. *Обратная задача рассеяния для дробно-линейного пучка дифференциальных операторов Штрума-Лиувилля преприт.* №5 96,Баку 1996, 25с.

[3]. Марчено В.А. , Островский И.В. *Характеристика спектра Оператора Хилла.* -Мат. сборник, 1975, т.97, вып. 4, с.540-606.



**Paşayev R.T. İKİ SPEKTRƏ GÖRƏ BİR SİNİF KƏSR-XƏTTİ ŞTRUMA-LİUVİLL DƏSTİNİN TƏYİN EDİLMƏSİ**

İşdə $0 \le x \le b$ parçasında

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} \lambda y, & a < x < b \\ -\dfrac{1}{\lambda} y, & 0 < x < a, \end{cases}$$

diferensial ifadəsi və

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(b) = 0$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(b) = 0$$

cərhəd şərtləri ilə yaradılmış sərhəd məsələlərinin spektrlərinə görə düz və tərs məsələlər tədqiq edilmişdir.

**Pashayev R.T. A DETERMINATING OF ONE CLASS OF STURHLIOU VILLE'S FRACTIONAL-LINEAR BUNDLE ON TWO SPECTRUM**

In this work straight and inverse problem of spectums for boundary problems, generated on $0 \le x \le b$ segment by equation

$$-y'' + q(x)y = \begin{cases} \lambda y, & a < x < b \\ -\dfrac{1}{\lambda} y, & 0 < x < a, \end{cases}$$

and two boundary conditions

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y(b) = 0$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(b) = 0$$

are investigated.