1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.443

РЗАЕВ Р.М.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ТЕРМИНАХ СРЕДНЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ

1.Рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$Af(x) = A_k f(x) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}\left\{K_\varepsilon(x-y)-\left(\sum_{|\nu|\le k-1}\frac{x^\nu}{\nu!}D^\nu k(-y)\right)x_{\{|t|>1\}}(y)\right\}f(y)dy, \qquad (1)$$

где

$$K(x)=\omega\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-n}, \quad \int_{S^{n-1}}\omega(x)ds=0, \quad K_\varepsilon(x)=K(x)X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x),$$

$X_{\{|t|>\varepsilon\}}$ – характеристическая функция множества $\{t\in R^n:|t|>\varepsilon\}$, S^{n-1} – единичная сфера в евклидовом пространстве $R^n, k\in N$; при $k=1$ предполагается, что $K(x)$ дифференцируема и имеет ограниченные частные производные первого порядка, а при $k>1$ функция $K(x)$ κ раз непрерывно дифференцируема на $S^{n-1}; \nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$, $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)\in R^n$, $x^\nu=x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\ldots x_n^{\nu_n}$, $|\nu|=\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n$, $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n$, целые неотрицательные числа, $\nu!=\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!$,

$$D^\nu f := \frac{\partial^{|\nu|}f}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}.$$

Можно проверить, что если $f\in L^p(R^n)$ $(1\le p<\infty)$, то сингулярный интеграл (1) отличается от интеграла

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}K_\varepsilon(x-y)f(y)dy \qquad (2)$$

полиномом степени не выше $k-1$. Вместе с тем, если рассматриваются классы локально суммируемых функций, содержащие множество P_{k-1} – совокупность всех полиномов степени не выше $k-1$ в R^n, то целесообразно выбирать сингулярный интеграл в виде (1) (см. [1], [5]).

Пусть $B(a,r) := \{x \in R^n : |x-a| \le r\}$– замкнутый шар в R^n радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in R^n$. Применим процесс ортогонализации посредством скалярного произведения

$$(f,g) := \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} f(t)g(t)dt$$

к системе степенных функций $\{x^\nu\}, |\nu| \le k$, расположенных в лексикографическом порядке, где $|B(a,r)|$ обозначает объем шара $B(a,r)$ Результат процесса ортогонализации обозначим $\{\varphi_\nu\}, |\nu| \le k$. Отметим, что система $\{\varphi_\nu\}, |\nu| \le k$, является ортогональной и нормированной.

Обозначим через $L^p_{loc}(R^n)\,(1 \le p < \infty)$ класс всех локально суммируемых в p-ой степени функций, определенных в R^n, а через $L^\infty_{loc}(R^n)$ -класс всех локально ограниченных функций.

Пусть $L^1_{loc}(R^n)$. Положим (см. [2], [4])

$$P_{k,B(a,r)}f(x) := \sum_{|\nu| \le k} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} f(t)\varphi_\nu\left(\frac{t-a}{r}\right)dt \right) \varphi_\nu\left(\frac{x-a}{r}\right).$$

Нетрудно видеть, что $P_{k,B(a,r)}f(x)$ является полиномом степени не выше *к*. Для функции $L^p_{loc}(R^n)\,(1 \le p < \infty)$ обозначим

$$\Omega_k(f,B(a,r))_p := \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(t) - P_{k-1,B(a,r)}f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty),$$

$$\Omega_k(f,B(a,r))_\infty := ess\sup\{|f(t) - P_{k-1,B(a,r)}f(t)| : t \in B(a,r)\}$$

$\Omega_k(f,B(a,r))_p$ $(1 \le p < \infty)$ назовем средней осцилляцией *к*-го порядка функции f в шаре $B(a,r)$ в метрике L^p. Введем следующую локальную метрическую характеристику функции $f \in L^p_{loc}(R^n)$:

$$m^k_f(x_0;\delta)_p := \sup\{\Omega_k(f,B(x_0,r))_p : r \le \delta\} \quad (\delta > 0),$$

где $x_0 \in R^n$ фиксированная точка.

С применением леммы 2 [5] о свойствах полиномов $P_{k-1,B(a,r)}f(x)$, теоремы об ограниченности оператора T в $L^p(R^n), 1 < p < \infty$ [3], леммы 1.3 [4] об одном разбиении единицы, а также некоторых вспомогательных конструкций доказывается следующая.

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in R^n$ фиксированная точка, $f \in L^p_{loc}(R^n), 1 < p < \infty$. Тогда при сходимости интеграла в правой части верно неравенство*

$$m^k_{\tilde{f}}(x_0;\delta)_p \le C\delta^k \int_\delta^\infty t^{-k-1} m^k_f(x_0;t)_p dt \quad (\delta > 0), \tag{3}$$

где $\widetilde{f} := A_k f$, *а постоянная c>0 не зависит от* x_0, f *и* δ.

2. Точку $x_0 \in R^n$ назовем m_p^k – точкой функции $f \in L_{loc}^p(R^n)$, если $m_f^{k+1}(x_0;\delta)_p = 0(\delta^k)$, $\delta \to 0$. Множество всех m_p^k – точек функции f обозначим через $M_p^k(f)$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, $k \in N \cup \{0\}$ *и*

$$\int_1^\infty t^{-k-2} m_f^{k+1}(x_0;t)_p \, dt < +\infty. \tag{4}$$

Тогда $x_0 \in M_p^k(f) \Rightarrow x_0 \in M_p^k(\widetilde{f})$, *где* $\widetilde{f} := A_{k+1} f$.

Доказательство. Если $x_0 \in M_p^k(f)$, то можно найти монотонно возрастающую и неотрицательную на $(0,1]$ функцию $\alpha(t)$ такую, что $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$ и $m_f^{k+1}(x_0;t)_p \le a(t)t^k$, $t \in (0,1]$. Учитывая это, из неравенства (3) при $0 < \delta \le 1$ имеем

$$m_{\widetilde{f}}^{k+1}(x_0;\delta)_p \le c\delta^{k+1}\int_\delta^1 t^{-k-2} m_f^{k+1}(x_0;t)_p \, dt + c\delta^{k+1}\int_1^\infty t^{-k-2} m_f^{k+1}(x_0;t)_p \le$$

$$\le c\delta^{k+1}\int_\delta^{\sqrt{\delta}} t^{-2} a(t) + c\alpha(1)\delta^{k+1}\int_{\sqrt{\delta}}^1 t^{-2} c_1 \delta^{k+1} \le c_2(\alpha(\sqrt{\delta})\delta^k + \delta^k\sqrt{\delta} + \delta^{k+1}) =$$

$$= o(\delta^k), \quad \delta \to 0,$$

т.е. $x_0 \in M_p^k(\widetilde{f})$. Теорема доказана.

Можно проверить, что если $L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, то для любой точки $x_0 \in M_p^k(f)$ условие (4) выполняется. Поэтому из предыдущей теоремы получается.

Следствие. *Пусть* $L^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, $k \in N \cup \{0\}$. *Тогда*

$$M_p^k(f) \subset M_p^k(Tf).$$

Пусть Φ –класс всех положительных монотонно возрастающих на $(0,+\infty)$ функций, а Φ_k $(k \in N)$ – класс всех функций $\varphi \in \Phi$ таких, что $\dfrac{\varphi(t)}{t^k}$ почти убывает*.

Пусть теперь $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $\varphi \in \Phi_k$, $k \in N$ и

$$f_{k,\varphi,p}^{\#}(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(t) - P_{k-1,B(x,r)} f(t) \right|^p dt \right)^{1/p}, \ x \in R^n,$$

---

*) Положительная функция $h(t)$, $t \in (0,+\infty)$, называется почти убывающей, если

$\exists c > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in (0,+\infty) : (t_1, t_2 \Rightarrow h(t_1) \ge ch(t_2))$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*
с соответствующей модификацией в случае $p=\infty$.

$$f^{\#}_{k,\varphi,p}(x):=\sup_{r>0}\frac{m^k_f(x;r)_p}{\varphi(r)},\quad x\in R^n, \tag{5}$$

Доказательство. Из определения функции $f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)$ сразу получаем, что

$$f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)=\sup_{r>0}\frac{m^k_f(x;r)_p}{\varphi(r)}. \tag{6}$$

С другой стороны, для любого числа $r>0$ верно неравенство

$$\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\left|f(t)-P_{k-1,B(x,r)}f(t)\right|^p dt\right)^{1/p}\le\varphi(r)f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)$$

Если переходить к супремуму при $r\le\delta$ в обоих частях последнего соотношения, то получится неравенство

$$m^k_f(x;\delta)_p\le\varphi(\delta)f^{\#}_{k,\varphi,p},\quad x\in R^n,\quad \delta>0,$$

или

$$f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)\ge\frac{m^k_f(x;\delta)_p}{\varphi(\delta)},\qquad \delta>0,\quad x\in R^n.$$

Отсюда

$$f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)=\sup_{r>0}\frac{m^k_f(x;\delta)_p}{\varphi(\delta)}\qquad x\in R^n. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) получается равенство (5). Лемма доказана.

Класс всех функций $\varphi\in\Phi_k$, удовлетворящюих условию

$$\delta^k\int_\delta^\infty\frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}dt=O(\varphi(\delta))\quad(\delta>0) \tag{8}$$

обозначим через Z_k.

Теорема 3. *Пусть* $f\in L^p_{loc}(R^n), 1<p<\infty, \varphi\in Z_k, k\in N,\quad \tilde{f}:=A_kf$. *Если в точке* $x\in R^n$ *величина* $f^{\#}_{k,\varphi,p}(x)$ *конечна, то верно неравенство*

$$(\tilde{f})^{\#}_{k,\varphi,p}(x)\le cf^{\#}_{k,\varphi,p}(x), \tag{9}$$

где постоянная $c>0$ *не зависит от* f *и* x.

Доказательство. Применяя неравенство (3) и учитывая соотношения (5), (8) имеем

$$\frac{m^k_{\tilde{f}}(x;\delta)_p}{\varphi(\delta)}\le c\frac{1}{\varphi(\delta)}\delta^k\int_\delta^\infty t^{-k-1}m^k_f(x;t)_p\,dt=c\frac{1}{\varphi(\delta)}\delta^k\int_\delta^\infty\frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\frac{m^k_f(x;t)_p}{\varphi(t)}\le$$

$$\le cf^{\#}_{k,\varphi,p}\delta^k\frac{1}{\varphi(\delta)}\int_\delta^\infty t^{-k-1}\varphi(t)dt\le c_1f^{\#}_{k,\varphi,p}(x),\quad\delta>0,$$

где постоянная $c_1>0$ не зависит от f, x и δ. Отсюда следует требуемое неравенство (9). Теорема доказана.

Отметим, что при $k=1, \varphi(\delta)=\delta^{\alpha}, \delta>0, \quad (0<\alpha<1)$, теорема 3 доказана в [6].

3. В случае $\varphi(\delta)=\delta^{\alpha}, \quad \delta>0, \quad (\alpha>0), k=[\alpha]+1$ обозначим $f^{\#}_{\varepsilon,p}(x)=f^{\#}_{k,\varphi,p}(x), x\in R^n$. Следуея работе [2] через $C^{\alpha}_p \quad (1\le p\le\infty, \alpha>0)$ обозначим класс всех функций $f\in L^p(R^n)$, для которых $f^{\#}_{\alpha,1}\in L^p(R^n)$, т.е.

$$C^{\alpha}_p:=\{f\in L^p(R^n): f^{\#}_{\alpha,1}\in L^p(R^n)\}.$$

Норма в C^{α}_p вводится следующим равенством

$$\|f\|_{C^{\alpha}_p}:=\|f\|_{L^p(R^n)}+|f|_{C^{\alpha}_p},$$

$|f|_{C^{\alpha}_p}:=\left\|f^{\#}_{\alpha,1}\right\|_{L^p(R^n)}$. В [2] показано, что в определении класса C^{α}_p можно использовать $f^{\#}_{\alpha,q}\ (q\le p)$ вместо $f^{\#}_{\alpha,q}$ причем нормы $\left\|f^{\#}_{\alpha,q}\right\|_{L^p(R^n)}$ и $\left\|f^{\#}_{\alpha,1}\right\|_{L^p(R^n)}$ эквивалентны с постоянной, не зависящей *от f*.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha>0, 1\le p\le\infty, k=[\alpha]+1$. *Тогда если* $f\in L^p_{loc}(R^n)$ *и* $|f|_{C^p_\alpha}<\infty$, *то*

$$|A_k f|_{C^p_\alpha}\le c|f|_{C^p_\alpha}, \tag{10}$$

где постоянная С не зависит от f.

Доказательство. Отметим, что если $1<p<\infty$, то неравенство (10) сразу следует из неравенства (9).

Рассмотрим максимальный оператор

$$M_\sigma g(x):=\sup_{r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|g(y)|^{\sigma}dy,\right)^{1/\sigma} \qquad \sigma>0.$$

Очевидно, что $(M_\sigma g)^{\sigma}=M\left(|g|^{\sigma}\right)$, где

$$Mf(x):=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy.$$

Известно, что (см. [3]) максимальный оператор Mf ограниченно действует в пространстве $L^q(R^n)$ если $1<q\le\infty$. Отсюда при $0<\sigma<p\le\infty$ имеем

$$\|M_\sigma g\|_{L^p(R^n)}\le C\|g\|_{L^p(R^n)}, \tag{11}$$

где $c>0$ не зависит от g.

Применяя неравенство Гельдера легко видеть, что

$$(A_k f)^{\#}_{\alpha,1}\le(A_k f)^{\#}_{\alpha,q}(x), x\in R^n, \tag{12}$$

при $1\le q<\infty$. В силу теоремы 4.3 из [2] имеем

$$f^{\#}_{\alpha,q}(x)\le const M_\delta(f^{\#}_{\alpha,1})(x), \tag{13}$$

где $\dfrac{1}{\sigma}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{\alpha}{n}$. Число $q\in(1,\infty)$ может быть выбрано так, чтобы выполнялось условие $0<\sigma<1$. Далее с помощью неравенства (9) получим

$$(A_k f)^{\#}_{\alpha,1}(x) \le const M_{\delta}(f^{\#}_{\alpha,1})(x). \qquad (14)$$

для почти всех $x \in R^n$. Объединяя неравенства (12)-(14) получаем

$$\left(A_k f^{*}_{\alpha,q}\right)(x) \le const M_{\sigma}\left(f^{*}_{\alpha,1}\right)(x).$$

Из последнего соотношения с помощью неравенства (11) получается требуемое утверждение . Лемма доказана.

Лемма 2 для нецелых $\alpha > 0$ и для интеграла $A_1 f$ доказана в [6].

Теорема 4. *Если* $1 < p < \infty$ *и* $\alpha > 0$, *то оператор* T, *определенный равенством (2), ограниченно действует в пространстве* C^{α}_{p}.

Доказательство. Так как для $f \in L^p(R^n)$ $(1 < p < \infty)$ выполняется условие $Tf - A_k f \in P_{k-1}$, то $(Tf)^{\#}_{\alpha,1}(x) = (A_k f)^{\#}_{\alpha,1}(x), x \in R^n$, $k = [\alpha]+1$. Отсюда при $f \in C^{\alpha}_{p}$ в силу (10) имеем

$$\left\|(Tf)^{\#}_{\alpha,1}\right\|_{(L^p R^n)} \le \left\|f^{\#}_{\alpha,1}\right\|_{(L^p R^n)}, \quad c = const.$$

Из этого неравенства, с учетом того, что оператор T ограничен в $L^p(R^n)$ $(1 < p < \infty)$, получается требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема об ограниченности сингулярного интегрального оператора по интервалу *(0,1)* в пространстве C^{α}_{p}, в случае $0 < \alpha < 1$, доказана в [7].

Литература

[1]. Fefferman Ch. *Characterizations of bounded mean oscillation*. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, v.77, №4, p. 587-588.

[2]. Devore R., Sharpley R. *Maximal functions measuring smoothness* . Memoir. Amer. Math.Soc., 1984, v.47 №293, p.1-115.

[3]. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*. М.: Мир, 1973, 342 с.

[4]. Рзаев Р.М. *О некоторых свойствах потенциала Рисса в терминах средней осцилляции высшего порядка* Труды ИММ АН Азерб., 1996, т.4, с.89-99.

[5]. Рзаев Р.М. *Многомерный сингулярный интегральный операторов пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию к-го порядка* Доклады РАН, 1997, т. 356, № 5, с.602-604.

[6]. Sharpley R., Shim Y.-S. *Singular integrals on* C^{α}_{p}. Stud. Math., 1989, v.92, №3, p. 285-293.

[7]. Кореновский А.А. *О локальной гладкости сопряженной функции.* Труды 4-ой Саратовской зимней школы « Теория функций и прибл.» 1990, ч.2, с. 128-130.

Rzaev R.M. ORTA OSSİLYASİYA TERMİNLƏRİNDƏ SİNQULYAR İNTEQRALLARIN LOKAL XASSƏLƏRİ

Təqdim olunan işdə funksiyaların lokal xassələrini yüksək tərtibli orta ossilyasiya terminlərində ifadə edən metrik xarakteristika daxil edilmiş və onun köməyi ilə çoxölçülü sinqulyar inteqralın lokal xassələri öyrənilmişdir.

Rzaev R.M. LOCAL PROPERTIES OF SINGULAR INTEGRALS IN TERMS OF MEAN OSCILLATION

In this work metric characteristic reflecting the local properzties of functions in highly order mean oscillation terms are intreduced and the local properties of multidimensional singular integrals have been studied by means of it.