УДК 517.9

САДЫГОВ М.А.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В работе рассматриваются вопросы минимизации негладких двумерных вариационных задач и экстремальные задачи для двумерных дифференциальных включений. Отметим, что экстремальные задачи для дифференциальных включений позволяют охватить многие из рассмотренных задач оптимального управления.

Полученные результаты развивают и обобщают неокторые результаты работ [1,2], автора.

1. О минимизации двумерных вариационных задач

Пусть $f:[0,T]\times[0,S]\times R^{3k+3m}\to\overline{R}=RU\{\pm\infty\}$, $\varphi_1:[0,S]\times R^{2k+m}\to\overline{R}$, $\varphi_2:[0,T]\times R^{2m+k}\to\overline{R}$ нормальные интегранты. Положим

$$V_t^p=\left\{u\in L_p^k([0,T]\times[0,S]):u_t\in L_p^k([0,T]\times[0,S])\right\},$$

$$V_s^p=\left\{\vartheta\in L_p^m([0,T]\times[0,S]):\vartheta_s\in L_p^m([0,T]\times[0,S])\right\},$$

где $1\le p<\infty$. Рассмотрим функционал

$$J(u,\vartheta)=\int_0^T\int_0^S f\left(\tau,\nu,\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau\vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\right)d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^S\varphi_1\left(\nu,u(0,\nu),u(T,\nu),\int_0^T\vartheta(t,\nu)dt\right)d\nu+\int_0^T\varphi_2\left(\tau,\vartheta(\tau,0),\vartheta(\tau,S),\int_0^S u(\tau,s)ds\right)d\tau$$

заданный на пространстве $V_t^p\times V_s^p$ с нормой $\|(u,\vartheta)\|_p=\|u\|_p+\|u_t\|_p+$ $+\|\vartheta\|_p+\|\vartheta_s\|_p$.

Легко проверяется, что любой линейный непрерывный функционал ϑ^* на $V_t^p\times V_s^p$ можно представить в виде

$$\vartheta^*(u,\vartheta)=\int_0^T\int_0^S(u(\tau,\nu)|V_0(\tau,\nu))d\tau d\nu+\int_0^T\int_0^S(u_t(\tau,\nu)|V(\tau,\nu))d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^T\int_0^S(\vartheta(\tau,\nu)|\omega_0(\tau,\nu))d\tau d\nu+\int_0^T\int_0^S(\vartheta_s(\tau,\nu)|\omega\ (\tau,\nu))d\tau d\nu\ ,$$

где $V_0(\cdot),V(\cdot)\in L_q^k([0,T]\times[0,S])$, $\omega_0(\cdot),\omega(\cdot)\in L_q^m([0,T]\times[0,S])$, $pq=p+q$.

Положив

$$J^*\left(\vartheta^*\right)=\sup_{u,\vartheta\in V_t^p\times V_s^p}\left\{\vartheta^*(u,\vartheta)-J(u,\vartheta)\right\}$$

определим сопряженный функционал $J^*\left(\vartheta^*\right)$ на $\left(V_t^p\right)^*\times\left(V_s^p\right)^*$.

Лемма 1. *Пусть f,φ_1,φ_2 - выпуклые нормальные интегранты и существуют функции* $(u_0,\vartheta_0)\in V_t^p\times V_s^p,\alpha(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\beta(\cdot)\in$ $\in L_1[0,S]$, $\gamma(\cdot)\in L_1[0,T]$ *и число* $c\geq 0$ *такие, что* $-\alpha(t,s)-c|z_1|^p\leq$ $\leq f(t,s,z_1)$, $-\beta(s)-c|z_2|^p\leq\varphi_1(s,z_2)$, $-\gamma(t)-c|z_3|^p\leq\varphi_2(t,z_3)$, $f\left(t,s,y,u_{0_t}(t,s),\vartheta_{0_s}(t,s)\right)\leq\alpha(t,s)+c|y|^p$, $\varphi_1(s,u_0(0,s),y_1)\leq\beta(s)+c|y_1|^p$ $\varphi_2(t,\vartheta_0(t,0),y_2)\leq\gamma(t)+c|y_2|^p$. Тогда существуют $\left(\overline{V}_1,\overline{V},\overline{\omega}_1,\overline{\omega},\overline{y}_3,\overline{z}_3\right)\in L_q^{2k}([0,T]\times[0,S])\times L_q^{2m}([0,T]\times[0,S])\times L_q^m[0,S]\times$ $\times L_q^k[0,T]$, где $\overline{V}_t\in L_q^k,\overline{\omega}_s\in L_q^m$, такие, что

$$J^*\left(\vartheta^*\right)=\int_0^T\int_0^S f^*\Bigg(\tau,\nu,-\overline{V}_1(\tau,\nu),-\overline{\omega}_1(\tau,\nu),V_0(\tau,\nu)-\overline{V}_t(\tau,\nu)-$$

$$-\int_0^\nu\overline{V}_1(t,s)ds+\int_0^S\overline{V}_1(\tau,\nu)d\nu+z_3(\tau),\omega_0(\tau,\nu)-\overline{\omega}_s(\tau,\nu)-\int_0^\tau\overline{\omega}_1(t,\nu)dt+\int_0^T\overline{\omega}_1(\tau,\nu)d\tau+y_3(\nu),V(\tau,\nu)-$$

$$-\overline{V}(\tau,\nu),\omega(\tau,\nu)-\overline{\omega}(\tau,\nu)\Bigg)d\tau d\nu+\int_0^S\varphi_1^*\left(\nu,-\overline{V}(0,\nu),\overline{V}(T,\nu),-y_3(\nu)\right)d\nu+$$

$$+\int_0^T\varphi_2^*\left(\tau,-\overline{\omega}(\tau,0),\overline{\omega}(\tau,S),-z_3(\tau)\right)d\tau.$$

Лемма 2. *Если выполнено условие леммы 1, то* $\vartheta^*\in\partial J(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют* $\left(\overline{V}_1,\overline{V},\overline{\omega}_1,\overline{\omega},\overline{y}_3,\overline{z}_3\right)\in$ $\in L_q^{2k}([0,T]\times[0,S])\times L_q^{2m}([0,T]\times[0,S])\times L_q^m[0,S]\times L_q^k[0,T]$, *где* $\overline{V}_t\in L_q^k$, $\overline{\omega}_s\in L_q^m$, *такие, что*

1) $$\Bigg(-\overline{V}_1(\tau,\nu),-\overline{\omega}_1(\tau,\nu),V_0(\tau,\nu)-\overline{V}_t(\tau,\nu)-\int_0^\nu\overline{V}_1(\tau,s)ds+\int_0^S\overline{V}_1(\tau,\nu)d\nu+\overline{z}_3(\tau),$$

$$,\omega_0(\tau,\nu)-\overline{\omega}_s(\tau,\nu)-\int_0^\tau\overline{\omega}_1(t,\nu)dt+\int_0^T\overline{\omega}_1(\tau,\nu)d\tau+\overline{y}_3(\nu),V(\tau,\nu)-\overline{V}(\tau,\nu),\omega(\tau,\nu)-$$

$$-\overline{\omega}(\tau,\nu)\Bigg)\in\partial f\left(\tau,\nu,\int_0^\nu\overline{u}(\tau,s)ds,\int_0^\tau\overline{\vartheta}(t,\nu)dt,\overline{u}(\tau,\nu),\overline{\vartheta}(\tau,\nu),\overline{u}_t(\tau,\nu),\overline{\vartheta}_s(\tau,\nu)\right),$$

2) $$\left(-\overline{V}(0,\nu),\overline{V}(T,\nu),-\overline{y}_3(\nu)\right)\in\partial\varphi_1\left(\nu,\overline{u}(0,\nu),\overline{u}(T,\nu),\int_0^T\overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right),$$

3) $\left(-\bar{\omega}(\tau,0),\bar{\omega}(\tau,S),-\bar{z}_3(\nu)\right)\in\partial\varphi_2\left(\tau,\bar{\vartheta}(\tau,0),\bar{\vartheta}(\tau,S),\int_0^S\bar{u}(\tau,s)ds\right).$

Теорема 1. *Пусть $f(\tau,\nu,\cdot),\varphi_1(\nu,\cdot),\varphi_2(\tau,\cdot)$ выпуклы. Для того, чтобы $(\bar{u},\bar{\vartheta})$ являлась точкой минимума функционала $J(u,\vartheta)$ на пространстве $V_t^p\times V_s^p$ достаточно, а в случае выполнения условий леммы 1 и необходимо, чтобы нашлись функции $(\bar{V}_1,\bar{V},\bar{\omega}_1,\bar{\omega},\bar{y}_3,\bar{z}_3)\in L_q^{2k}([0,T]\times[0,S])\times\times L_q^{2m}([0,T]\times[0,S])\times L_q^m[0,S]\times L_q^k[0,T]$, где $\bar{V}_t\in L_q^k$, $\bar{\omega}_s\in L_q^m$, такие, что*

1) $$\left(-\bar{V}_1(\tau,\nu),-\bar{\omega}_1(\tau,\nu),\bar{V}_t(t,\nu)-\int_0^\nu\bar{V}_1(\tau,s)ds+\int_0^S\bar{V}_1(\tau,\nu)d\nu+\bar{z}_3(\tau),\bar{\omega}_s(\tau,\nu)-\right.$$
$$\left.-\int_0^\tau\bar{\omega}_1(t,\nu)dt+\int_0^T\bar{\omega}_1(\tau,\nu)d\tau+\bar{y}_3(\nu),\bar{V}(\tau,\nu),\bar{\omega}(\tau,\nu)\right)\in$$
$$\in\partial f\left(\tau,\nu,\int_0^\nu\bar{u}(\tau,s)ds,\int_0^\tau\bar{\vartheta}(t,\nu)dt,\bar{u}(\tau,\nu),\bar{\vartheta}(\tau,\nu),\bar{u}_t(\tau,\nu),\bar{\vartheta}_s(\tau,\nu)\right),$$

2) $$\left(\bar{V}(0,\nu),-\bar{V}(T,\nu),-\bar{y}_3(\nu)\right)\in\partial\varphi_1\left(\nu,\bar{u}(0,\nu),\bar{u}(T,\nu),\int_0^T\bar{\vartheta}(t,\nu)dt\right),$$

3) $$\left(\bar{\omega}(\tau,0),-\bar{\omega}(\tau,S),-\bar{z}_3(\tau)\right)\in\partial\varphi_2\left(\tau,\bar{\vartheta}(\tau,0),\bar{\vartheta}(\tau,S),\int_0^S\bar{u}(\tau,s)ds\right).$$

Рассмотрим субдифференцируемости интегрального функционала

$$K(u,\vartheta)=\int_0^T\int_0^S g\left(\tau,\nu,\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau\vartheta(t,\nu)dt\right)d\tau d\nu+\int_0^S\psi_1\left(\nu,\int_0^T\vartheta(t,\nu)dt\right)d\nu+$$
$$+\int_0^T\psi_2\left(\tau,\int_0^S u(\tau,s)ds\right)d\tau$$

в пространстве $V_t^p\times V_s^p$, где

$g:[0,T]\times[0,S]\times R^k\times R^m\to\bar{R},\psi_1:[0,S]\times R^m\to\bar{R}$, $\psi_2:[0,T]\times R^k\to\bar{R}$.

Рассмотрим пространства

$$\bar{V}_t^p=\left\{\int_0^s u(t,\nu)d\nu:u\in V_t^p\right\},\bar{V}_s^p=\left\{\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau:\vartheta\in V_s^p\right\},$$
$$\bar{V}_T^p=\left\{\int_0^S u(t,\nu)d\nu:u\in V_t^p\right\},\bar{V}_S^p=\left\{\int_0^T\vartheta(\tau,s)d\tau:\vartheta\in V_S^p\right\}$$

соответственно с нормой

$$\|u\|=\max_{t,s}\left|\int_0^s u(t,\nu)d\nu\right|,\|\vartheta\|=\max_{t,s}\left|\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\right|,$$

$$\|u\| = \max_t \left| \int_0^S u(t,\nu)d\nu \right|, \|\vartheta\| = \max_s \left| \int_0^T \vartheta(\tau,s)d\tau \right|.$$

Положим $Q = \left\{ (y,z) \in \overline{V}_t^p \times \overline{V}_s^p : \int_0^T \int_0^S g(\tau,\nu,y(\tau,\nu),z(\tau,\nu))d\tau d\nu < +\infty \right\},$

$$Q_1 = \left\{ y_1 \in \overline{V}_S^p : \int_0^S \psi_1(s,y_1(s))ds < +\infty \right\}, Q_2 = \left\{ y_2 \in \overline{V}_T^p : \int_0^T \psi_2(\tau,y_2(\tau))d\tau < +\infty \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть* g,ψ_1 *и* ψ_2 *выпуклые нормальные интегранты, существуют такие* $a_1(\cdot) \in L_1([0,T]\times[0,S]), a_2(\cdot) \in L_1[0,T], a_3(\cdot) \in L_1[0,S]$ *и* $c > 0$, *что* $a_1(t,s) + c|z|^p \le g(t,s,z), a_2(t) + c|y_1|^p \le \psi_2(t,y_1)$, $a_3(s) + c|y_2|^p \le \le \psi_1(s,y_2)$, *существуют функции* $(u_0,\vartheta_0) \in V_t^p \times V_s^p$ *и число* $r > 0$ *такие, что для* $(y_1,z_1) \in R^k \times R^m, |(y_1,z_1)| \le r$ *функции* $g\left(t,s,\int_0^s u_0(t,\nu)d\nu + \right.$ $\left. + y_1, \int_0^t \vartheta_0(\tau,s)d\tau + z_1\right)$, $\psi_1\left(s,\int_0^T \vartheta_0(\tau,s)d\tau + z_1\right)$, $\psi_2\left(t,\int_0^S u_0(t,\nu)d\nu + y_1\right)$ *суммируемы. Тогда* $\vartheta^* = ((V_0,V),(\omega_0,\omega)) \in \partial K(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *тогда и только тогда, когда существуют* $\lambda \in frm([0,T]\times[0,S])^{k+m}, \mu \in frm[0,T]^k, \gamma \in frm[0,S]^m$ *такие, что*

1) $\vartheta^*(u,\vartheta) = \int_0^T\int_0^S \left(\left(\int_0^\nu u(\tau,s)ds, \int_0^\tau \vartheta(t,\nu)dt \right) \middle| d\lambda \right) + \int_0^T \left(\int_0^S u(t,\nu)d\nu \middle| d\mu \right) +$
$+ \int_0^S \left(\int_0^T \vartheta(\tau,\nu)d\tau \middle| d\gamma \right),$

2) $(y^*(\tau,\nu), z^*(\tau,\nu)) \in \partial g\left(\tau,\nu,\int_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds, \int_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right),$

3) $z_1^*(\nu) \in \partial\psi_1\left(\nu,\int_0^T \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right)$, 4) $y_1^*(\tau) \in \partial\psi_2\left(\tau,\int_0^S \overline{u}(\tau,s)ds\right)$,

5) $\max\limits_{(y,z)\in Q} \int_0^T\int_0^S ((y,z)|d\lambda_s) = \int_0^T\int_0^S \left(\left(\int_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds, \int_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt \right) \middle| d\lambda_s \right),$

6) $\max\limits_{y_1\in Q_1} \int_0^S (y_1(\nu)|d\gamma_s) = \int_0^S \left(\int_0^T \overline{\vartheta}(\tau,\nu)d\tau \middle| d\gamma_s \right),$

7) $\max\limits_{y_2\in Q_2} \int_0^T (y_2(\tau)|d\mu_s) = \int_0^T \left(\int_0^S \overline{u}(\tau,\nu)d\nu \middle| d\mu_s \right),$

где $\lambda(E)=\int\limits_E (y^*(t,\nu),z^*(\tau,\nu))d\tau d\nu+\lambda_s(E)$, $\gamma(E_1)=\int\limits_{E_1} z_1^*(\nu)d\nu+\gamma_s(E_1)$, $\mu(E_2)=$ $=\int\limits_E y_1^*(\tau)d\tau+\mu_s(E_2)$- *Лебеговское разложение соответственно* λ,μ *и* γ.

Лемма 4. *Пусть* g,ψ_1 *и* ψ_2 *выпуклые нормальные интегранты и существует число* $r>0$ *такое, что для* $(y_1,z_1)\in R^k\times R^m, |(y_1,z_1)|\le r$ *функции* $g\left(t,s,\int\limits_0^s \overline{u}(t,\nu)d\nu+y_1,\int\limits_0^t \overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau+z_1\right)$, $\psi_1\left(s,\int\limits_0^T \overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau+z_1\right)$, $\psi_2\left(t,\int\limits_0^s \overline{u}(t,\nu)d\nu+y_1\right)$ *суммируемы. Тогда* $\vartheta^*=((V_0,V),(\omega_0,\omega))\in\partial K(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *тогда и только тогда, когда существуют функции* $(y^*(\tau,\nu),z^*(\tau,\nu))\in\partial g\left(\tau,\nu,\int\limits_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds,\int\limits_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right)$, $z^*(\nu)\in\partial\psi_1\left(\nu,\int\limits_0^T \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right)$, $y^*(\tau)\in\partial\psi_2\left(\tau,\int\limits_0^S \overline{u}(\tau,s)ds\right)$, *где* $(y^*(\cdot),z^*(\cdot))\in L_1^{k+m}([0,T]\times[0,S])$, $z_1^*(\cdot)\in$ $\in L_1^m[0,S]$, $y_1^*(\cdot)\in L_1^k[0,T]$, *такие, что* $\int\limits_0^S y^*(\tau,s)ds-\int\limits_0^\nu y^*(\tau,s)ds+y_1^*(\tau)=$ $=V_0(\tau,\nu)-V_t(\tau,\nu)$, $\int\limits_0^T z^*(t,\nu)dt-\int\limits_0^\nu z^*(t,\nu)dt+z_1^*(\nu)=\omega_0(\tau,\nu)-\omega_S(\tau,\nu)$, $V(0,\nu)=0$, $V(T,\nu)=0,\omega(\tau,0)=0,\omega(\tau,S)=0$.

Положим $f^0(t,s,y,z;\vartheta^*)=\inf\{(w|\vartheta^*)+f(t,s,y,z,w):w\in R^{2k+2m}\}$, $\varphi_1^0(\nu,\vartheta_1^*,y)=\inf\{(w_1|\vartheta_1^*)+\varphi_1(\nu,w_1,y):w_1\in R^{2k}\}$, $\varphi_2^0(\tau,\vartheta_2^*,z)=\inf\{(w_2|\vartheta_2^*)+$ $+\varphi_2(\tau,w_2,z):w_2\in R^{2m}\}$.

Теорема 2. *Пусть* f,φ_1 *и* φ_2 *выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы* $(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *являлась точкой минимума функционала* $J(u,\vartheta)$ *на пространстве* $V_t^p\times V_s^p$ *достаточно, а если существуют функции* $(u_0,\vartheta_0)\in V_t^p\times V_s^p$, $\alpha(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\beta(\cdot)\in L_1[0,S]$, $\varsigma(\cdot)\in L_1[0,T]$, *числа* $c\ge 0,r>0$ *такие, что для* $(y_1,z_1)\in R^k\times R^m, |(y_1,z_1)|\le r$

$$f\left(t,s,\int\limits_0^s u_0(t,\nu)d\nu+y_1,\int\limits_0^t \vartheta_0(\tau,s)d\tau+z_1,y,z,u_{0_t}(t,s),\vartheta_{0_s}(t,s)\right)\le$$

$$\le\alpha(t,s)+c|(y,z)|^p,\ \varphi_1\left(s,u_0(0,s),y,\int\limits_0^T \vartheta_0(\tau,s)d\tau+z_1\right)\le\beta(s)+c|y|^p,$$

$$\varphi_2\left(t,\vartheta_0(t,0),z,\int_0^S u_0(t,\nu)d\nu+y_1\right)\le\varsigma(t)+c|z|^p,\ -\alpha(t,s)-c|z|^p\le f(t,s,z),$$

$$-\beta(s)-c|z_2|^p\le\varphi_1(s,z_2),\ -\varsigma(t)-c|z_3|^p\le\varphi_2(t,z_3),$$

то и необходимо, чтобы нашлись функции

$\left(V_0,V,\overline{V},\omega_0,\omega,\overline{\omega}\right)\in\ L_q^{3k}([0,T]\times[0,S])\times L_q^{3m}([0,T]\times[0,S])$,

$\lambda\in frm([0,T]\times[0,S])^{k+m}$, $\mu\in frm[0,T]^k$, $\gamma\in frm[0,S]^m$ *такие, что*

1) $\left(y^*(\tau,\nu),z^*(\tau,\nu)\right)\in\partial f^0\left(\tau,\nu,\int_0^\nu\overline{u}(\tau,s)ds,\int_0^\tau\overline{\vartheta}(t,\nu)dt,\overline{V}_t(\tau,\nu)-\right.$

$\left.-V_0(\tau,\nu),\overline{\omega}_s(\tau,\nu)-\omega_0(\tau,\nu),\overline{V}(\tau,\nu)-V(\tau,\nu),\overline{\omega}(\tau,\nu)-\omega(\tau,\nu)\right)$,

2) $z_1^*(\nu)\in\partial\varphi_1^0\left(\nu,\overline{V}(0,\nu),-\overline{V}(T,\nu),\int_0^T\overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right)$,

3) $y_1^*(\tau)\in\partial\varphi_2^0\left(\tau,\overline{\omega}(\tau,0),-\overline{\omega}(\tau,S),\int_0^S\overline{u}(\tau,s)ds\right)$,

4) $\vartheta^*(u,\vartheta)=\int_0^T\int_0^S\left(\left(\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau\vartheta(t,\nu)dt\right|d\lambda\right)+$

$+\int_0^T\left(\int_0^S u(t,\nu)d\nu\middle|d\mu\right)+\int_0^S\left(\int_0^T\vartheta(\tau,\nu)d\tau\middle|d\gamma\right)$,

5) $\max\limits_{(y,z)\in Q}\int_0^T\int_0^S\left((y,z)|d\lambda_s\right)=\int_0^T\int_0^S\left(\left(\int_0^\nu\overline{u}(\tau,s)ds,\int_0^\tau\overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right)\middle|d\lambda_s\right)$,

6) $\max\limits_{y_1\in Q_1}\int_0^S\left(y_1(\nu)|d\gamma_s\right)=\int_0^S\left(\int_0^T\overline{\vartheta}(\tau,\nu)d\tau\middle|d\gamma_s\right)$,

7) $\max\limits_{y_2\in Q_2}\int_0^T\left(y_2(\tau)|d\mu_s\right)=\int_0^T\left(\int_0^S\overline{u}(\tau,\nu)d\nu\middle|d\mu_s\right)$,

где $\lambda(E)=\int_E\left(y^*(\tau,\nu),z^*(\tau,\nu)\right)d\tau d\nu+\lambda_s(E),\mu(E_1)=\int_E y_1^*(\tau)d\tau+\mu_s(E_1),\gamma(E_2)=$
$=\int_E z_1^*(\nu)d\nu+\gamma_s(E_2)$- *Лебеговское разложение соответственно* λ,μ,γ;

$Q=\{(y,z)\in\overline{V}_t^{\,p}\times\overline{V}_s^{\,p}\}:\int_0^T\int_0^S f^0\left(\tau,\nu,y(\tau,\nu),z(\tau,\nu),\overline{V}_t(\tau,\nu)-V_0(\tau,\nu),\overline{\omega}_s(\tau,\nu)-\right.$
$\left.-\omega_0(\tau,\nu),\overline{V}(\tau,\nu)-V(\tau,\nu),\overline{\omega}(\tau,\nu)-\omega(\tau,\nu)\right)d\tau d\nu<+\infty\ \}$,

$Q_1=\left\{y_1\in\overline{V}_S^{\,p}:\int_0^S\varphi_1^0\left(\nu,\overline{V}(0,\nu),-\overline{V}(T,\nu),y_1(\nu)\right)d\nu<+\infty\right\}$,

$$Q_2=\left\{y_2\in \overline{V}_T\ :\int_0^T \varphi_2^0(\tau,\overline{\omega}(\tau,0),-\overline{\omega}(\tau,S),y_2(\tau))d\tau<+\infty\right\},\ \ \vartheta^*=((V_0,V),(\omega_0,\omega)).$$

Теорема 3. *Пусть* f,φ_1 *и* φ_2 *выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы* $(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *явлалась точкой минимума функционала* $J(u,\vartheta)$ *на простврнстве* $V_t^p\times V_s^p$ *достаточно, а если при* $(u_0,\vartheta_0)=(\overline{u},\overline{\vartheta})$ *удовлетворяются условия теоремы 2, то и необходимо, чтобы нашлись функции* $(\overline{V}_1,\overline{V},\overline{\omega}_1,\overline{\omega},\overline{y}_3,\overline{z}_3)\in L_1^k([0,T]\times[0,S])\times L_q^k([0,T]\times[0,S])\times$

$$\times L_1^m([0,T]\times[0,S])\times L_q^m([0,T]\times[0,S])\times L_1^m[0,S]\times L_1^k[0,T],$$

где $\overline{V}_t\in L_1^k,\overline{\omega}_s\in L_1^m$, *такие, что*

1) $$\left(-\overline{V}_1(\tau,\nu),-\overline{\omega}_1(\tau,\nu)\right)\in\partial f^0\left(\tau,\nu,\int_0^\nu\overline{u}(\tau,s)ds,\int_0^\tau\overline{\vartheta}(t,\nu)dt,\overline{V}_t(\tau,\nu)+\right.$$

$$+\int_0^\nu\overline{V}_1(\tau,s)ds-\int_0^S\overline{V}_1(\tau,s)ds-\overline{z}_3(\tau),\overline{\omega}_s(\tau,\nu)+\int_0^\tau\overline{\omega}_1(t,\nu)dt-\int_0^T\overline{\omega}_1(t,\nu)dt-$$

$$\left.-\overline{y}_3(\nu),\overline{V}(\tau,\nu),\overline{\omega}(\tau,\nu)\right),$$

2) $$-\overline{y}_3(\nu)\in\partial\varphi_1^0\left(\nu,\overline{V}(0,\nu),-\overline{V}(T,\nu),\int_0^T\overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right),$$

3) $$-\overline{z}_3(\tau)\in\partial\varphi_2^0\left(\tau,\overline{\omega}(\tau,0),-\overline{\omega}(\tau,S),\int_0^S\overline{u}(\tau,s)ds\right).$$

2. Об экстремальной задаче для двумерных дифференциальных включений.

Пусть $a_1:[0,T]\times[0,S]\times R^{2k+2m}\to 2^{R^k}$, $a_2:[0,T]\times[0,S]\times R^{2k+2m}\to 2^{R^m}$, причем $a_i(\tau,\nu,z)$ компакты при всех (τ,ν,z); $M_1:[0,S]\to 2^{R^k}$, $M_2:[0,T]\to 2^{R^m}$ измерипмы, $M_1(s)$ и $M_2(t)$ не пусты. Функция $(u,\vartheta)\in V_t^p\times V_s^p$ удовлетворяющая включениям

$$\begin{aligned}&u_t(t,s)\in a_1\left(t,s,u(t,s),\vartheta(t,s),\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\right),\\&u(0,s)\in M_1(s),s\in[0,S]\\&\vartheta_s(t,s)\in a_2\left(t,s,u(t,s),\vartheta(t,s),\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\right),\\&\vartheta(t,0)\in M_2(t),t\in[0,T]\end{aligned}\qquad (1)$$

для почти всех (t,s) называется решением включения *(1)*. Решение включения *(1)* минимизирующее функционал

$$J(u,\vartheta)=\int\limits_0^T\int\limits_0^S f\left(\tau,\nu,\int\limits_0^\nu u(\tau,s)ds,\int\limits_0^\tau \vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\right)d\tau d\nu+$$

$$+\int\limits_0^S\varphi_1\left(\nu,u(0,\nu),u(T,\nu),\int\limits_0^T\vartheta(t,\nu)dt\right)d\nu+$$

$$+\int\limits_0^T\varphi_2\left(\tau,\vartheta(\tau,0),\vartheta(\tau,S),\int\limits_0^S u(\tau,s)ds\right)d\tau \qquad (2)$$

среди всех решений задачи *(1)* назовем оптимальным. Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи *(1), (2)*.

Лемма 5. *Пусть отображения* $(t,s)\to a_i(t,s,z)$ *измеримы,* $a_i(t,s,z)$ *компактны и* $\rho_x\left(a_i(t,s,z_1),a_i(t,s,z)\right)\le M|z_1-z|,\ i=1,2$.

Тогда, если для $(\overline{u},\overline{\vartheta})\in V_t^p\times V_s^p$

$$d\left(\overline{u}_t(t,s),a_1\left(t,s,\overline{u}(t,s),\overline{\vartheta}(t,s),\int\limits_0^s\overline{u}(t,\nu)d\nu,\int\limits_0^t\overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau\right)\right)\le$$

$$\le\rho_1(t,s),\ \ d\left(\overline{u}(0,s),\varphi(s)\right)\le\varsigma_1(s)$$

$$d\left(\overline{\vartheta}_s(t,s),a_2\left(t,s,\overline{u}(t,s),\overline{\vartheta}(t,s),\int\limits_0^s\overline{u}(t,\nu)d\nu,\int\limits_0^t\overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau\right)\right)\le$$

$$\le\rho_2(t,s),\ \ d\left(\overline{\vartheta}(t,0),\varphi(t)\right)\le\varsigma_2(t),$$

где $\rho_1(\cdot)\in L_p([0,T]\times[0,S])$, $\varsigma_1(\cdot)\in L_p[0,S]$, $\varsigma_2(\cdot)\in L_p[0,T]$, функции φ и ψ измеримы, то существует такое решение (u,ϑ) задачи

$$u_t(t,s)\in a_1\left(t,s,u(t,s),\vartheta(t,s),\int\limits_0^s u(\tau,\nu)d\nu,\int\limits_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\right),\ \ u(0,s)=\varphi(s)$$

$$\vartheta_s(t,s)\in a_2\left(t,s,u(t,s),\vartheta(t,s),\int\limits_0^s u(\tau,\nu)d\nu,\int\limits_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\right),\vartheta(t,0)=\psi(t)$$

что

$$|u_t(t,s)-\overline{u}_t(t,s)|\le\rho_1(t,s)+M(a+b)ch\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+6M^2(a+b)e^{6M(t+s)}+$$

$$+Me^{Mt}\varsigma_1(s)+Me^{Ms}\varsigma_2(t)+M\int\limits_0^t e^{M(t-\tau)}\rho_1(\tau,s)d\tau+M\int\limits_0^s e^{M(s-\nu)}\rho_2(t,\nu)d\nu,$$

$$|\vartheta_s(t,s)-\overline{\vartheta}_s(t,s)|\le\rho_2(t,s)+M(a+b)ch\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+6M^2(a+b)e^{6M(t+s)}+$$

$$+Me^{Mt}\varsigma_1(s)+Me^{Ms}\varsigma_2(t)+M\int\limits_0^t e^{M(t-\tau)}\rho_1(\tau,s)d\tau+M\int\limits_0^s e^{M(s-\nu)}\rho_2(t,\nu)d\nu,$$

$$|u(t,s)-\overline{u}(t,s)|\le\sqrt{\frac{M}{6}}(a+b)sh\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+M(a+b)e^{6M(t+s)}+$$

$$+e^{Mt}\varsigma_1(s)+Mbe^{Ms}+\int_0^t e^{(t-\tau)M}\rho_1(\tau,s)d\tau,$$

$$|\vartheta(t,s)-\bar{\vartheta}(t,s)|\le\sqrt{\frac{M}{6}}(a+b)sh\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+M(a+b)e^{6M(t+s)}+$$

$$+e^{Ms}\varsigma_2(t)+Mae^{Mt}+\int_0^s e^{(s-\nu)M}\rho_2(t,\nu)d\nu,$$

$$\int_0^S|u(t,\nu)-\bar{u}(t,\nu)|d\nu\le\frac{a+b}{6}ch\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+\frac{a+b}{6}e^{6M(t+s)}+$$

$$+ae^{Mt}+be^{Ms}-\frac{a+b}{3}-b$$

$$\int_0^T|\vartheta(\tau,s)-\bar{\vartheta}(\tau,s)|d\tau\le\frac{a+b}{6}ch\left(\sqrt{6M}(t+s)\right)+\frac{a+b}{6}e^{6M(t+s)}+$$

$$+ae^{Mt}+be^{Ms}-\frac{a+b}{3}-a,$$

где $a=\int_0^S\varsigma_1(\nu)d\nu+\int_0^T\int_0^S\rho_1(\tau,\nu)d\tau d\nu, b=\int_0^T\varsigma_2(\tau)d\tau+\int_0^T\int_0^S\rho_2(\tau,\nu)d\tau d\nu$.

Положим

$$\psi_1(\tau,\nu,z,\omega)=\inf\{|u-\omega|:u\in a_1(\tau,\nu,z)\},\ q_1(\nu,z)=\inf\{|u-z|:u\in M_1(\nu)\},$$

$$\psi_2(\tau,\nu,z,\vartheta)=\inf\{|z-\vartheta|:z\in a_2(\tau,\nu,z)\},\ q_2(\tau,y)=\inf\{|z-y|:z\in M_2(\tau)\},$$

$$F_p(u,\vartheta)=\left\{\int_0^T\int_0^S\left[\psi_1\left(\tau,\nu,\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau\vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\psi_2\left(\tau,\nu,\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau\vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\right)\right]^p d\tau d\nu\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_0^T q_2^p(\tau,\vartheta(\tau,0))d\tau\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^S q_1^p(\nu,u(0,\nu))d\nu\right)^{\frac{1}{p}},I_l(u,\vartheta)=J(u,\vartheta)+lF_p(u,\vartheta).$$

Теорема 4. *Пусть отображения* $(\tau,\nu)\to a_i(\tau,\nu,z)$, $\nu\to M_1(\nu)$, $\tau\to M_2(\tau)$ измеримы, $a_i(\tau,\nu,z)$ компактны и $\rho_x(a_i(\tau,\nu,z_1),a_i(\tau,\nu,z))\le\le M|z_1-z|$, $i=1,2$. Кроме того, пусть существуют функции $k(\cdot)\in L_q([0,T]\times[0,S])$, $k_1(\cdot)\in L_q[0,S]$, $k_2(\cdot)\in L_q[0,T]$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ такие, что

1) $|f(\tau,\nu,z)-f(\tau,\nu,z_1)|\le k(\tau,\nu)|z-z_1|$ для $z,z_1\in R^{3k+3m}$

2) $|\varphi_1(\nu,y)-\varphi_1(\nu,y_1)|\le k_1(\nu)|y-y_1|$ для $y,y_1\in R^{2k+m}$

3) $\left|\varphi_2(\tau,\vartheta)-\varphi_2(\tau,\vartheta_1)\right|\le k_2(\tau)\left|\vartheta-\vartheta_1\right|$ для $\vartheta,\vartheta_1\in R^{2m+k}$

и пусть отображения $(\tau,\nu)\to f(\tau,\nu,z_1)$, $\nu\to\varphi_1(\nu,y)$, $\tau\to\varphi_2(\tau,\vartheta)$ измеримы. Тогда, если $(\overline{u},\overline{\vartheta})\in V_t^p\times V_s^p$ является решением задачи *(1), (2),* то существует число $l_0>0$ такое, что

$$I_0^{\{\beta\}-}\left((\overline{u},\overline{\vartheta}),(u,\vartheta)\right)\ge 0 \quad \text{для любого} \quad (u,\vartheta)\in V_t^p\times V_s^p.$$

Рассмотрим задачу *(1), (2)* при дополнительном ограничении

$$\left(\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\ \int_0^s \vartheta(\tau,s)d\tau\right)\in M(t,s), \tag{3}$$

где $M:[0,T]\times[0,S]\to 2^{R^{m+k}}$, причем $M(t,s)$ замкнуты при всех (t,s), отображение $(t,s)\to M(t,s)$ непрерывно, $\operatorname{int}M(t,s)$ не пусто. Пусть $(\overline{u}(t,s),\overline{\vartheta}(t,s))$ является решением задачи *(1)-(3)*. Кроме того предполагаем, что существует гиперкасательная к $M(t,s)$ в $\left(\int_0^s \overline{u}(t,\nu)d\nu,\ \int_0^t \overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau\right)$ (см. [3]). Множество всех касательных к C в x обозначается $T_C(x)$ (см. [3]). Обозначим $\delta_Q(x)=\begin{cases}0,\ x\in Q\\ +\infty,\ x\notin Q\end{cases}$.

Для простоты рассмотрим случай $p=1$ и положим $\bar{f}_l=f+l(\psi_1+\psi_2)$, $\overline{\varphi}_{1l}=\varphi_1+lq_1$, $\overline{\varphi}_{2l}=\varphi_2+lq_2$, $\bar{f}=f+\delta_{a_1}+\delta_{a_2}$, $\overline{\varphi}_1=\varphi_1+$ $+\delta_{M_1}$, $\overline{\varphi}_2=\varphi_2+\delta_{M_2}$. Рассмотрим следующую задачу

$$E_l(u,\vartheta)=\int_0^T\int_0^S \bar{f}_l\left(\tau,\nu,\int_0^\nu u(\tau,s)ds,\int_0^\tau \vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\right)d\tau\,d\nu+$$

$$+\int_0^S \overline{\varphi}_{1l}\left(\nu,u(0,\nu),u(T,\nu),\int_0^T \vartheta(t,\nu)dt\right)d\nu+\int_0^T \overline{\varphi}_{2l}\left(\tau,\vartheta(\tau,0),\vartheta(\tau,S),\int_0^S u(\tau,s)ds\right)d\tau+$$

$$+\int_0^T\int_0^S \delta_{M(t,s)}\left(\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\int_0^t \vartheta(\tau,s)d\tau\right)dtds \xrightarrow{(u,\vartheta)\in V_t^1\times V_s^1}\inf.$$

Ясно, что $\inf E_l(u,\vartheta)\le J(\overline{u},\overline{\vartheta})$. Тогда , если E_l полунепрерывно снизу, то по теореме Екланда (см. [4]) существует $(\overline{u}_l(\cdot),\overline{\vartheta}_l(\cdot))\in V_t^1\times V_s^1$, что $E_l(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l)\le\ \le J(\overline{u},\overline{\vartheta})$ и минимизирует функционал

$$\widetilde{E}_l(u,\vartheta)=E_l(u,\vartheta)+\frac{1}{\sqrt{l}}\left\|(u,\vartheta)-(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l)\right\|. \tag{4}$$

Предположим, что $(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l)$ сходится к решению задачи *(1)-(3)*. (Если $J(u,\vartheta)=K(u,\vartheta)$, то при условиях это предположение удовлетворяется). Положим (см. [3])

$$f^{+}(x;\vartheta)=\limsup_{\substack{(y,\alpha)\downarrow f^{x},\omega\to\vartheta\\ t\downarrow 0}}\frac{f(y+t\omega)-\alpha}{t},$$

$$f^{\uparrow}(x;\vartheta)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{\substack{y\downarrow f^{x}\\ t\downarrow 0}}\inf_{\omega\in\vartheta+\varepsilon B}\frac{f(y+t\omega)-f(y)}{t},$$

где символ $(y,\alpha)\downarrow f^{x}$ означает, что $(y,\alpha)\in epif$, $y\to x,\alpha\to f(x)$; $y\downarrow f^{x}$ означает, что $y\to x,\ f(y)\to f(x)$.

Если удовлетворяется условие теоремы 4, то используя теорему Фату (см. [5]) получим

$$\widetilde{E}_l^{+}(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l;u,\vartheta)\le\int_0^T\int_0^S\bar{f}_l^{\uparrow}\Bigg(\tau,\nu,\int_0^{\nu}\overline{u}_l(\tau,s)ds,\int_0^{\tau}\overline{\vartheta}_l(t,\nu)dt,\overline{u}_l(\tau,\nu),\overline{\vartheta}_l(\tau,\nu),$$

$$\overline{u}_{l_t}(\tau,\nu),\overline{\vartheta}_{l_s}(\tau,\tau);\int_0^{\nu}u(\tau,s)ds,\int_0^{\tau}\vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\Bigg)d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^S\overline{\varphi}_{1l}^{\uparrow}\Bigg(\nu,\overline{u}_l(0,\nu),\overline{u}_l(T,\nu),\int_0^T\overline{\vartheta}_l(t,\nu)d\nu;u(0,\nu),u(T,\nu),\int_0^T\vartheta(t,\nu)dt\Bigg)d\nu+$$

$$\int_0^T\overline{\varphi}_{2l}^{\uparrow}\Bigg(\tau,\overline{\vartheta}_l(\tau,0),\overline{\vartheta}_l(\tau,S),\int_0^S\overline{u}_l(\tau,s)ds;\vartheta(\tau,0),\vartheta(\tau,S),\int_0^S u(\tau,s)ds\Bigg)d\tau+$$

$$+\int_0^T\int_0^S\delta_{\operatorname{int}T_{M(t,s)}\left(\int_0^s\overline{u}_l(t,\nu)d\nu,\int_0^t\overline{\vartheta}_l(\tau,s)d\tau\right)}\Bigg(\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\Bigg)dtds+\frac{1}{\sqrt{l}}\|(u,\vartheta)\|.$$

Из теоремы 2.9.5 [3] вытекает, что $\widetilde{E}_l^{+}(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l;u,\vartheta)=\widetilde{E}_l^{\uparrow}(\overline{u}_l,\overline{\vartheta}_l;u,\vartheta)$ при

$$(u,\vartheta)\in\Bigg\{(u,\vartheta)\in V_t^p\times V_s^p:\Bigg(\int_0^s u(t,\nu)d\nu,\int_0^t\vartheta(\tau,s)d\tau\Bigg)\in$$

$$\in\operatorname{int}T_{M(t,s)}\Bigg(\int_0^s\overline{u}_l(t,\nu)d\nu,\int_0^t\overline{\vartheta}_l(\tau,s)d\tau\Bigg)\Bigg\}.$$

Поэтому

$$0\le E_l^{\uparrow}(\widetilde{u}_l,\overline{\vartheta}_l;u,\vartheta)\le S_l(u,\vartheta)=$$

$$=\int_0^T\int_0^S f_l^{\uparrow}\Bigg(\tau,\nu,\int_0^{\nu}\overline{u}_l(\tau,s)ds,\int_0^{\tau}\overline{\vartheta}_l(t,\nu)dt,\overline{u}_l(\tau,\nu),\overline{\vartheta}_l(\tau,\nu),\overline{u}_{l_t}(\tau,\nu),\overline{\vartheta}_{l_s}(\tau,\nu);$$

$$\int_0^{\nu}u(\tau,s)ds,\int_0^{\tau}\vartheta(t,\nu)dt,u(\tau,\nu),\vartheta(\tau,\nu),u_t(\tau,\nu),\vartheta_s(\tau,\nu)\Bigg)d\tau d\nu+$$

$$+\int_0^S\varphi_{1l}\Bigg(\nu,\overline{u}_l(0,\nu),\overline{u}_l(T,\nu),\int_0^T\overline{\vartheta}_l(t,\nu)d\nu;u(0,\nu),u(T,\nu),\int_0^T\vartheta(t,\nu)dt\Bigg)d\nu+$$

$$+\int_0^T \overline{\varphi}_{2l}\left(\tau, \overline{\vartheta}_l(\tau,0), \overline{\vartheta}_l(\tau,S), \int_0^S \overline{u}_l(\tau,s)ds; \vartheta(\tau,0), \vartheta(\tau,S), \int_0^S u(\tau,s)ds\right)d\tau +$$

$$+\int_0^T\int_0^S {}_{T_{M(t,s)}\left(\int_0^s \overline{u}_l(t,\nu)d\nu, \int_0^t \overline{\vartheta}_l(\tau,s)d\tau\right)}\left(\int_0^s u(t,\nu)d\nu, \int_0^t \vartheta(\tau,s)d\tau\right)dtds + \frac{1}{\sqrt{l}}\|(u,\vartheta)\|.$$

Учитывая, что $0 = S_l(0,0) \le S_l(u,\vartheta)$ и производная по направлению Кларка полунепрерывна сверху, то переходя к пределу в $S_l(u,\vartheta)$ при $l \to +\infty$ и применяя теорему 2 получим следующую теорему:

Теорема 5. *Если удовлетворяются выше сказанные условия и* (u,ϑ) *среди всех решений задачи (1), (3) минимизирует функсионал (2), то существуют функции* $(V_0, V, \overline{V}, \omega_0, \omega, \overline{\omega}) \in L_\infty^{3k+3m}([0,T]\times[0,S])$, $\lambda \in$ $\in frm([0,T]\times[0,S])^{k+m}$, $y_1^* \in L_1^k[0,T]$, $z_1^* \in L_1^m[0,S]$ *такие, что*

1) $$\left(y^*(\tau,\nu), z^*(\tau,\nu), -\overline{V}_t(\tau,\nu)+V_0(\tau,\nu), -\overline{\omega}_s(\tau,\nu)+\omega_0(\tau,\nu), -\overline{V}(\tau,\nu)+\right.$$
$$\left.+V(\tau,\nu), -\overline{\omega}(\tau,\nu)+\omega(\tau,\nu)\right)\in$$

$$\in \partial \overline{f}\left(\tau, \nu, \int_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds, \int_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt, \overline{u}(\tau,\nu), \overline{\vartheta}(\tau,\nu), \overline{u}_t(\tau,\nu), \overline{\vartheta}_s(\tau,\nu)\right)+$$

$$+\left(N_{M(\tau,\nu)}\left(\int_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds, \int_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right), 0\right),$$

2) $$\left(-\overline{V}(0,\nu), \overline{V}(T,\nu), z_1^*(\nu)\right) \in \partial\overline{\varphi}_1\left(\nu, \overline{u}(0,\nu), \overline{u}(T,\nu), \int_0^T \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right),$$

3) $$\left(-\overline{\omega}(\tau,0), \overline{\omega}(\tau,S), y_1^*(\tau)\right) \in \partial\overline{\varphi}_2\left(\tau, \overline{\vartheta}(\tau,0), \overline{\vartheta}(\tau,S), \int_0^S \overline{u}(\tau,s)ds\right),$$

4) $$\vartheta^*(u,\vartheta) = \int_0^T\int_0^S\left(\left(\int_0^\nu u(\tau,s)ds, \int_0^\tau \vartheta(t,\nu)dt\right) \middle| d\lambda\right) + \int_0^T\int_0^S \left(u(\tau,\nu) \middle| y_1^*(\tau)\right)d\tau d\nu +$$
$$+\int_0^T\int_0^S \left(\vartheta(\tau,\nu) \middle| z_1^*(\nu)\right)d\tau d\nu$$

5) $$\max_{\substack{(y,z)\in T_{M(t,s)}\left(\int_0^s \overline{u}(t,\nu)d\nu, \int_0^t \overline{\vartheta}(\tau,s)d\tau\right) \\ (y,z)\in \overline{V}_t^1\times\overline{V}_s^1}} \int_0^T\int_0^S \left((y,z) \middle| d\lambda_S\right) = \int_0^T\int_0^S\left(\left(\int_0^\nu \overline{u}(\tau,s)ds, \int_0^\tau \overline{\vartheta}(t,\nu)dt\right) \middle| d\lambda_s\right)$$

где $\lambda(E) = \int_E \left(y^*(\tau,\nu), z^*(\tau,\nu)\right)d\tau d\nu + \lambda_s(E)$ *- Лебеговское разложение* λ.

Отметим, что аналогичная методика применима и для многомерных дифференциальных включений.

Литература

[1]. Садыгов М.А. *Об экстремальной задаче для двумерных дифференциальных включений.* Изв. АН Азербайджана, 1995, №1-3.
[2]. Садыгов М.А. *Экстремальные задачи для негладких систем.* Баку, 1996,148 с.
[3]. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* М.: Наука, 1988.
[4]. Обен Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* М.: Мир, 1988.
[5]. Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* М.: Наука, 1987.

Sadıqov M.A. **İKİÖLÇÜLÜ DİFERENSİAL DAXİL OLMANIN EKSTREMUMU ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR**

İşdə qeyri hamar variasiya məsələsi və diferensial daxilolma üçün ekstremal məsələ öyrənilir.

Sadygov M.A. **NECESSARY EXTREMUM CONDITIONS FOR TWO DIMENSIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS**

In the paper the extremal for nonsmoth variational problems and differential inclusions are studied.