1998 ТОМ VIII (XVI)

УДК 519.21

АЛИЕВ С.А.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Пусть R_+^m - множество всех m- мерных вещественных векторов $x=\left(x^1,\ldots,x^m\right)$ с неотрицательными координатами, C_+^m - множество всех комплексных m- мерных векторов $\lambda=\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^m\right)$ координаты которых имеют неотрицательные вещественные части.

Напомним, что марковский процесс в R_+^m $\xi(t)=\left(\xi^1(t),\ldots,\xi^m(t)\right)$, $t\in[0,\infty)$ называется ветвящимся процессом с непрерывным фазовым пространством, если

$$M\left[e^{-(\lambda,\xi(t))}\middle|\xi(0)=x\right]=e^{-(x,K(t,\lambda))} \qquad (1)$$

где $x\in R_+^m,\ \lambda\in C_+^m,\ (x,\lambda)=\sum_{i=1}^m x^i\lambda^i,\ K(t,\lambda)=\left(K^1(t,\lambda),\ldots,K^m(t,\lambda)\right)$ и $K^j(t,\lambda)$ - при каждом $t\geq 0$ есть взятый со знаком минус логарифм преобразования Лапласа некоторого безгранично делимого распределения в R_+^m.

Примем следующие обозначения

$$K(1,\lambda)=K(\lambda),\quad M=\left\|\frac{\partial K^j(\lambda)}{\partial\lambda^i}\Big|_{\lambda=0}\right\|_{i,j=\overline{1,m}},$$

$$A=\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\|\frac{\partial K^j(\lambda)}{\partial\lambda^i}\right\|_{i,j=\overline{1,m}},\quad Q=\left\|\frac{\partial K^j(\lambda)}{\partial\lambda^i}\Big|_{\lambda=q}\right\|_{i,j=\overline{1,m}},$$

q - вероятность вырождения процесса.

Пусть ρ,γ,π - есть перроновы числа матриц M,A,Q- соответственно.

В данной работе будут доказаны предельные теоремы для указанных процессов, которые являются обобщением хорощо известых теорем для ветвящихся процессов с дискретным фазовым пространством [1].

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть* G_n *- последовател тность мер на* R_+^m *таких, что* $G_n(R_+^m) \le 1$, $\psi_n(\lambda)$ *- последовательность соответствующих преобразований Лапласа.*

Предположим, что существует последовательность вещественных чисел α_n такая, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\frac{1-\psi_n(\lambda)}{\alpha_n} \to \lambda^1 \ldots \lambda^m \beta(\lambda) \qquad (2)$$

равномерно по λ внутри C_+^m.

Тогда $\beta(\lambda) = \int\limits_{R_+^m} e^{-(\lambda,x)} b(x) dx$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-G_n(x)}{\alpha_n} = b(x)$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$\int\limits_{R_+^m} e^{-(\lambda,x)}[1-G_n(x)]dx = \frac{1-\psi_n(\lambda)}{\lambda^1 \ldots \lambda^m} \qquad (3)$$

Из *(2)* и теоремы непрерывности вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} \int\limits_0^x [1-G_n(y)]dy = B(x),$$

где символ $\int\limits_0^x$ означает, что интегрирование ведется по множеству $\{y : 0 \le y \le x\}$, а $B(x)$ - функция распределения меры B такая, что $\beta(\lambda) = \int\limits_{R_+^m} e^{-(\lambda,x)} B(dx)$. Рассмотрим функцию

$$H_n(x) = \int\limits_0^x [1-G_n(y)]dy - x^1 \ldots x^m [1-G_n(x)]$$

Покажем, что $H_n(x)$ есть функция распределения некоторой меры H_n. Действительно, если $G_n(x)$ имеет плотность $g(x)$, то последовательным дифференцированием по $x^1, \ldots, x^m$ нетрудно убедиться, что $\frac{\partial^m}{\partial x' \ldots \partial x^m} H_n(x) \ge 0$, и следовательно $H_n(x)$ - функция распределения.

Вычисляя преобразование Лапласа мер H_n, получаем при $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$\int\limits_{R_+^m} e - (\partial, x) H_n(dx) = \frac{1-\psi_n(\lambda)}{\lambda^1 \ldots \lambda^m} - (-1)^m \lambda^1 \ldots \lambda^m \frac{\partial^m}{\partial\lambda^1 \ldots \partial\lambda^m} \left[\frac{1-\psi_n(\lambda)}{\lambda^1 \ldots \lambda^m}\right] \qquad (4)$$

Далее, используя известные теоремы о сходимости аналитических функций многих комплексных переменных, получаем

$$\gamma_n(\lambda) = \frac{1}{\alpha_n} \int\limits_{R_+^m} e^{-(\lambda,x)} H_n(dx) \underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to}\gamma(\lambda)=\beta(\lambda)-(-1)^m\lambda^1\ldots\lambda^m\frac{\partial^m}{\partial\lambda^1\ldots\partial\lambda^m}\beta(\lambda) \qquad (5)$$

Из теоремы непрерывности следует, что $\gamma(\lambda)$ - преобразование Лапласа некоторой меры C, и так как,

$$(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial\lambda^1\ldots\partial\lambda^m}\beta(\lambda)=\frac{\beta(\lambda)-\gamma(\lambda)}{\lambda^1\ldots\lambda^m},$$

то $x^1\ldots x^m B(dx)=\left[B(x)-C(x)\right]dx$.

Следовательно, мера B имеет плотность $b(x)$, равную при $x>0$

$$\frac{B(x)-C(x)}{x^1\ldots x^m}b(x)$$

Из *(5)* следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n}H_n(x)=C(x) \qquad (6)$$

а отсюда очевидным образом следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-G_n(x)}{\alpha_n}=\frac{B(x)-C(x)}{x^1\ldots x^m}=b(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Если* $\gamma<1<\rho$*, то*

(I) $$\lim_{t\to\infty}P\left\{\xi(t)\le x\middle|\xi(0)=e_j,\lim_{S\to\infty}\xi(s)=0,\ \xi(t)\ge\varepsilon>0\right\}=\frac{\int_\varepsilon^x B_j(dy)}{\int_\varepsilon^\infty B_j(dy)}$$

где мера B_j *такова, что*

$$B_j\left(R_+^m\setminus\{x:x\le\varepsilon\}\right)<\infty$$

для всякого $\varepsilon>0,\ \varepsilon\in R_+^m$.

(II) *преобразование Лапласа*

$$\beta_j(\lambda)=\int_{R_+^m}e^{-(\lambda,x)}B_j\left(R_+^m\setminus\{y:y\le x\}\right)dx$$

существует при $\operatorname{Re}\lambda>0$. *Функция* $\alpha_j(\lambda)=\lambda^1\ldots\lambda^m\beta_j(\lambda)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\alpha_j\left(K(\lambda+q)-q\right)=\pi\alpha_j(\lambda) \qquad (7)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$M\left[e^{-(\lambda,\xi(t))}\middle|\xi(0)=x,\lim_{S\to\infty}\xi(s)=0\right]=e^{-\left(x,K(t,\lambda+q)-q\right)}$$

Далее, из того, что последовательность $\pi^{-t}Q^t$ сходится, следует равностепенная непрерывность и ограниченность последовательности

$$\alpha_j(t,\lambda)=\pi^{-t}\left[1-\exp\left\{-K^j(t,\lambda+q)+q^j\right\}\right]$$

на кождом компактном подпротранстве в C_+^m. Применяя лемму, получаем

$$\beta_j(\lambda)=\frac{\alpha_j(\lambda)}{\lambda'\ldots\lambda^m}=\int_{R_+^m}e^{-(\lambda,x)}b_j(x)dx$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-P\left\{\xi(t)\le x\middle|\xi(0)=e_j,\ \lim_{S\to\infty}\xi(s)=0\right\}}{\pi^t}=b_j(x) \qquad (8)$$

Определив меру B_j равенством

$$B_j\left(R_+^m\setminus\{y:y\le x\}\right)=b_j(x)$$

из *(8)* легко получим первое утверждение теоремы. Функциональое уравнение *(7)* получается, если в выражение для $\alpha_j(\lambda)$ вместо λ подставить $K(\lambda+q)-q$.

Теорема 2. *Если* $\rho<1$ *и*

$$\frac{\partial^2K^r(\lambda)}{\partial\lambda^i\partial\lambda^j}\Big|_{\lambda=0}>-\infty$$

для всех $i,j,r=\overline{1,m}$, *то*

(I) $$\lim_{t\to\infty}P\left\{\xi(t)\le x\middle|\xi(0)=e_j,\ \xi(t)\ge\varepsilon>0\right\}=\frac{\int_\varepsilon^x B_j(dy)}{\int_\varepsilon^\infty B_j(dy)}$$

где мера B_j *такова, какова в теореме 1.*

(II) Преобразование Лапласа

$$\beta_j(\lambda)=\int_{R_+^m}e^{-(\lambda,x)}B_j\left(R_+^m\setminus\{y:y\le x\}\right)dx$$

существует при $\operatorname{Re}\lambda>0$. *Функция* $\alpha_j(\lambda)=\lambda^1\ldots\lambda^m\beta_j(\lambda)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\alpha_j(K(\lambda))=\rho\alpha_j(\lambda)$$

Доказательство. Достаточно показать, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-K^j(t,\lambda)}}{\rho^t}=\alpha_j(\lambda)$$

Дальнейшие рассуждения такие, как при доказательстве теоремы 1.

Литература

[1]. Яглом А.М. *Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов.* ДАН СССР, т.56, 1947, с. 795-798.

Əliyev S.A.

KƏSİLMƏZ FAZA FƏZALI ŞAXƏLƏNƏN PROSESLƏR ÜÇÜN LİMİT TEOREMLƏRİ

Məqalədə kəsilməz faza fəzasına malik olan şaxələnən təsadüfi proseslər üçün limit teoremləri alınmışdır.

Aliev S.A.

THE LIMIT THEOREMS FOR THE CENTIUOS ATATE BRANCHING PROSSES

In this paper the limit theorems for the continuos state braching prosses are obtained.