УДК 517.946

АСЛАНОВ Г.И.

КРАТНАЯ ПОЛНОТА ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В данной работе будет установлена m- кратная полнота системы обобщенных собственных и присоединенных функций для эллиптических операторов второго порядка, определенных на множестве функций, удовлетворяющих нулевым условиям Дирихле. Определение m- кратной полноты принадлежит М.В. Келдышу [1]. Будет рассматриваться случай неограниченной области и несамосопряженный оператор. Требования на его коэффициенты минимальные. В работе [2] нами рассмотрена близкая задача, где были требования обязательного роста потенциала на бесконечности. Здесь потенциал может быть вообще ограниченным, а дискретность спектра будет следовать из соответствующих ограничений на структуру области. Случай ограниченной области рассматривался в работе [3].

Пусть задан линейный несамосопряженный дифференциальный оператор L в виде

$$Lu = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (1)$$

Будем считать, что $a_{ij}(x)$ - вещественные функции и

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \ge C|\xi|^2,\ C>0$$

функции $a_i(x)$-комплекснозначные. Предпологается, что $x \in \overline{\Omega}$ и все коэффициенты оператора L локально ограниченные измеримые функции.

Сформулируем требования на область Ω.

Будем через $Q_a^{x_0}$ обозначать куб, центр которого $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и ребра имеют длину a, т.е. $Q_a^{x_0} = \left\{x : x \in R^n, \left|x_i - x_i^0\right| < \frac{a}{2}, i \le n\right\}$. Пусть Ω такова, что, если $x_0 \,\overline{\in}\, Q_k^0$, то $(n-1)$- мерная мера Лебега проекции множества

$R^n/\Omega\bigcap Q_{h^{-\sigma}}^{x_0}$ на одну из координатных $(n-1)$-мерных гиперплоскостей больше, чем $h^{-\sigma(n-1)}$ при $h>1$. Постоянная $\sigma>0$ от h не зависит.

Если Ω такова, что $0<x_n<\psi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ где $\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ непрерывная функция такая, что $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\le c\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}\right)^{-\sigma}$, $\sigma>0$ при $\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2>1$, то Ω удовлетворяет нужному условию. Рассмотрим опреаторный пучок

$$L(\lambda)u=L(u)+\sum_{k=0}^{m}\lambda^k r_k(x)u$$

где $\beta_1\le r_m(x)\le\beta_2$, $\beta_1,\beta_2>0$, $r_m(x)$ - вещественная локально ограниченная функция, $r_i(x)$ $(i<m)$ - комплекснозначные локально ограниченные функции.

Обобщенной собственной функцией операторного пучка $L(\lambda)$ называется функция $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что при любой $\vartheta(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место тождество:

$$-\int_\Omega\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_j}dx+\int_\Omega a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\vartheta}\,dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{m}\lambda^k r_k(x)u\overline{\vartheta}dx=0 \qquad (2)$$

Здесь $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ - пространство С.Л. Соболева - пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx$$

Заметим, что при наших требованиях на Ω в ней имеет место неравенство Фридрихса:

$$\int_\Omega u^2(x)dx\le c\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx$$

Отметим, что в силу требований на Ω пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega)$.

Напомним, что обобщенными присоединенными функциями операторного пучка $L(\lambda)$ называются обобщенные из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ решения уравнения:

$$L(\lambda)u_p=-\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\sum_{k=0}^{m}\lambda^k r_k(x)\right]u_{p-j}$$

Теорема. *Система обобщенных из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *собственных и присоединенных функций операторного пучка* $L(\lambda)$ m*- кратно полна в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Основу доказательства составляет редукция к классической теореме М.В. Келдыша [1].

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$[u,\vartheta]=\int_\Omega\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_j}dx$$

Рассмотрим билинейные формы:

$$A[u,\vartheta]=\int_\Omega\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\vartheta}(x)dx+\int_\Omega r_0(x)u\overline{\vartheta}\,dx$$

$$A_i[u,\vartheta]=\int_\Omega r_i(x)u\overline{\vartheta}\,dx \qquad 1\le i\le m$$

Каждая из этих форм порождает в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ линейные и вполне непрерывные операторы, которые обозначим соответственно A, A_i. Эти обозначения дают возможность задачу записать в виде

$$-[u,\vartheta]+[Au,\vartheta]+\sum_{k=1}^m\lambda^k[A_ku,\vartheta]=0$$

которая равносильна уравнению:

$$Au+\sum_{k=1}^m\lambda^kA_ku=u \qquad (3)$$

Оператор A_m положительно определенный самосопряженный ограниченный опратор, спектр которого дискретен и следовательно его собственные функции, которые естественно выбрать ортонормированными в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, образуют полную в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ систему.

Пусть λ_3, $s=1,2,\ldots$ собственные значения оператора A_m. Покажем, что оператор A_m имеет конечный порядок, т.е. при некотором γ

$$\sum_{s=1}^\infty|\lambda_s|^\gamma<\infty$$

Пусть $-\Delta_\Omega$- оператор Лапласа, где $D(\Delta_\Omega)=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Очевидно, что $\lambda_s^{-1}\ge c[\lambda_s(-\Delta_\Omega)]$, где $\lambda_s(-\Delta_\Omega)$- собственные значения оператора $-\Delta_\Omega$, $c=const$ от s не зависит. Рассмотрим оператор $-\Delta_R$, область определения которого сужение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на множество функций таких, что $u\big|_{x=R}=0$. Это тоже самосопряженный оператор, и так как $D(-\Delta_R)\subset D(A_m)$ то $\lambda_s(-\Delta_R)\geq\lambda_s(-\Delta_\Omega)$.

Пусть задано $h=const>0$. Существует, в силу ограничений на Ω постоянная H такая, что если $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\sup pu(x)\bigcap Q_h^0=\varnothing$ то

$$\int_\Omega u^2(x)dx\leq c_n\cdot h^{-2\sigma}\int_\Omega grad^2\, udx$$

Таким образом, если u_s- собственная функция оператора $-\Delta_R$, $R=H\cdot h^\sigma$ соответствующая λ_s такому, что $\lambda_s<h^{2\sigma}\cdot c_n^{-1}$, то $\sup pu_s\in Q_h^0$. В Q_h^0 для s-ого собственного значения оператороа Лапласа с нулевыми краевыми условиями Дирихле имеет место оценка

$$\lambda_s(-\Delta_R)\geq ks^{2/n}\cdot h^2$$

$k=const$ от s,h не зависит. Выберем h так, чтобы $h=\left(ks^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{2\sigma+2}}\cdot c_n$. Тогда

$$\lambda_s(-\Delta_R)\geq k_1\cdot s^\tau,\ \ \tau=\frac{1}{n(\sigma+2)}$$

Следовательно, $\lambda_s^\tau\leq\left[\lambda_s(-\Delta_\Omega)\right]^{-1}\leq k_2\cdot s^{-\tau}$. Отсюда следует, что оператор A_m имеет конечный порядок. В таком случае и оператор $H=(A_m)^{\frac{1}{m}}$ тоже имеет конечный порядок.

Препишем уравнение [3] в виде

$$u=Au+\lambda^m H^m u+\sum_{k=1}^{m-1}\lambda^k H^k\widetilde{A}_k u \qquad (4)$$

От билинейной формы оператора A_k получим

$$A_k[u,\vartheta]=\int_\Omega r_k(x)u(x)\overline{\vartheta}(x)dx=\int_\Omega r_m(x)\frac{r_k(x)}{r_m(x)}u(x)\overline{\vartheta}(x)dx=$$

$$=\left[A_m\left(\frac{r_k}{r_m}u\right),\vartheta\right]$$

т.е. $A_k u=A_m\left(\frac{r_k}{r_m}u\right)$.

Оператор умножения на $\frac{r_k}{r_m}$ ограничен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В таком случае оператор $\widetilde{A}_k=A_m^{-\frac{k}{m}}\cdot A_k\left(\frac{r_k}{r_m}\right)$ при $k\leq m-1$ так же является вполне непрерывным оператором.

К уравнению [4] применима теорема М.В. Келдыша [1], из которой следует m- кратная полнота его собственных и присоединеных функций в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Теорема доказана.

Выражаю искренную признательность академику М.Г. Гасымову и профессору М. Байрамоглы за полезные советы.

Литература

[1]. Келдыш М.В. *О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов.* УМН, 1971, XXVI, вып. 4 (160), с.15-41.

[2]. Асланов Г.И. *Полнота системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного эллиптического оператора II порядка в неограниченной области.* Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, 1982, №3, с. 22-26.

[3]. Ильин В.А., Круковский Н.М. *О полноте обобщенных собственных и присоединенных функций эллиптического несамосопряженного оператора.* Диффер. уравнения, 1974, т. 10, №4, с. 699-711.

Aslanov H.İ.

QEYRİ-MƏHDUD OBLASTDA ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN ELLİPTİK OPERATORLARIN ÜMUMİ - LƏŞMİŞ MƏXSUSİ VƏ QOŞULMUŞ FUNKSİYALAR SİSTEMİNİN ÇOXQATTAMLIĞI

Məqalədə qeyri-məhdud oblastda ikinci tərtib öz-özünə qoşma olmayan elliptik operatorların ümumiləşmiş məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin -qat tamlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Aslanov G.I.

FELD COMPLETENESS OF GENERALIZED EIGEN AND ADJEINT FUNCTIONS OF NONSELFADJOINT ELLIPTIC OPERATORS IN UNBOUNDED DOMAIN

For the nonselfadjoint elliptic operators of the second order given in unbounded domain, the theorem on m- fold completeness of generalized eigen and adjoint functions are proved.