УДК 517.95

АХМЕДОВ А.М.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Настояшая работа посвящена вопросам разрешимости некоторых классов дифференциальных уравнений, операторные коэффициенты которого представляют собой аналитические функции, имеюшие единственную особую точку в нуле, являюшуюся полюсом конечного порядка.

Рассмотренные операторные коэффициенты действуют в банаховом пространстве X и они, как и в скалярном случае, зависят от комплексного переменнго z.

В скалярном случае этим исследованиям посвяшено много работ. Среди них отметим монографию В.В.Голубева «Лекции аналитической теории дифференциальных уравнений» , Москва, 1950, книг Ф.Хартмана «Обыкновенные дифферециальные уравнения» Москва, 1970, Э.Л.Коддингтона и Н.Левинсона «Теория обыкновенных дифференциальных уравнений» , Москва, 1958, и др., а в абстрактном случае, работу Э.Хилле [1] и монографию Ю.Л.Далецкого и М.Г.Крейна [2], где имеется обширная литература по указанным выше вопросам.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dz} = A(z)x, \quad x(z_0) = x_0 \tag{1}$$

в комплексной области z-плоскости.

Случай, когда оператор $A(z)$ регулярен в некоторой односвязной области G, содержашей точку z_0, разрешимость задачи (1) может быть исследована с помошью методов, указанных, например, в [2].

Представляя решение задачи (1) в виде

$$x(z) = U(z, z_0)x_0, \tag{2}$$

где $U(z_0, z_0) = I$; требуем, чтобы $U(z, z_0)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{dU}{dz} = A(z)U \tag{3}$$

в пространстве $L(X)$. Здесь $L(X)$-банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X.

В скалярном случае Фуксом [3] доказана теорема о том, что для того чтобы линейное дифференциальное уравнение обладало фундаментальным решением, имеюшим особенность в точке нуль не более чем полюс, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент *A(z)* имел не более чем полюс первого порядка в точке нуль.

Этот же результат Фуксом обобшен на случай линейных обыкновенных и однородных дифференциальных уравнений любого порядка, где вместо вышеуказанного условия предпалогается, что порядок полюса коэффициентов в точке $z=0$, не должны превышать порядка уравнения.

В операторном случае такая теорема пока не сушествует. Имеются результаты [2,4] только для уравнений типа (1), где порядок полюса коэффициента в точке нуль равен единице. Естественно, что условия, позволяюшие получитьь эти результаты, являются достаточными.

Теперь рассмотрим следуюшее уравнение

$$z^m \frac{dU}{dz} = A(z)U, \quad m > 1, \tag{4}$$

где $A(z) = \sum_{k=0}^{n+m} A_k z^k$, в пространстве $L(X)$.

Сначала выясним вопрос разрешимости упрошенного уравнения

$$z^m \frac{dU}{dz} = A_0 U. \tag{5}$$

Легко проверяется, что оператор-функция

$$U(z) = \exp\left(\frac{A_0}{1-m} z^{1-m}\right)$$

является решением уравнения (5).

Подобно этому решение уравнения (4) будем искать в виде

$$U(z) = \exp\left(\frac{A_0}{1-m} z^{1-m}\right)\left(\sum_{k=0}^{n+m} U_k z^k\right). \tag{6}$$

Требуется выполнения следуюших условий:

1) Предположим, что спектр оператора A_0 состоит из двух непересекаюшихся спектральных множеств:

$$\sigma(A_0) = \sigma_1(A_0) \cup \sigma_2(A_0), \quad \sigma_1(A_0) \cap \sigma_2(A_0) = \varnothing; \tag{7}$$

2) A_i, $i = \overline{0, m+n}$ являются коммутируюшими ограниченными спектральными операторами:

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad i, j = 0,1,\dots,m+n. \tag{8}$$

При решении уравнения (4) получается система операторных уравнений:

$$U_0 A_0 = A_0 U_0, \quad U_k A_0 = \sum_{i=0}^{k} A_i U_k, \quad при \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$U_k A_0 - A_0 U_k = \sum_{i=1}^{k} A_i U_{k-i} - (k-m+1) U_{k-m+1}, \quad при \quad k = \overline{m, m+n},$$

$$(k-m+1) U_{k-m+1} = \sum_{i=k-(n+m)}^{n+m} A_i U_{k-i}, \quad при \quad k = \overline{m+n+1, 2m+n-1}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=k-(n+m)}^{n+m} A_i U_{k-i} = \emptyset, \quad при\ k = \overline{2m+n, 2m+2n}.$$

Решая систему (9), доказывается

Теорема 1. *Если* $A_m = A_{m+1} = \ldots = A_{n+m} = 0$, $A_{m-1} = (n+m)I$ *и удовлетворяются условия (7), (8), то уравнение (4) имеет решение вида (9), коэффициенты которого определяются следующим образо*

$$U_k = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} N_1^{n_1} N_1^{n_2} (-1)^{n_1} \frac{(n_1+n_2)!}{n_1! n_2!} \int\limits_{\sigma_1(A_0)} \int\limits_{\sigma_2(A_0)} \frac{E(d\xi)E(d\varsigma)F_k}{(\xi-\eta)^{n_1+n_2+1}}$$

при k=0,1,...,m-1,

$$U_k = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} N_1^{n_1} N_1^{n_2} (-1)^{n_1} \frac{(n_1+n_2)!}{n_1! n_2!} \int\limits_{\sigma_1(A_0)} \int\limits_{\sigma_2(A_0)} \frac{E(d\xi)E(d\varsigma)F_k}{(\xi-\eta)^{n_1+n_2+1}} \times$$
$$\times (F_k - (k-m+1)U_{k-m+1})$$

при $k = m, m+1, \ldots, n+m$, $F_k = \sum_{i=1}^{k} A_i U_{k-i}$ *и* N_1, N_2 *- квазинильпотентные части, оператора* A_0, *отвечающие, соответственно, спектрам* $\sigma_1(A_0)$ *и* $\sigma_2(A_0)$ *спектрального оператора* A_0.

Теперь займемся исследованием вопроса разрешимости следующего уравнения:

$$z^2 \frac{d^2U}{dz^2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+1}\right)\frac{dU}{dz} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n\right) U(z) = 0 \qquad (10)$$

в пространстве $L(X)$.

Предположим, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ сходятся соответственно в кругах $|z| < \rho_1$ и $|z| < \rho_2$. Ищем решение уравнения (10) в виде:

$$U(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k z^k\right) z^R, \qquad (11)$$

где R-некоторый искомый ограниченный оператор, действующий в X. Учитывая (11) в уравнении (10), получим следующее реккурентное соотношение

$$\begin{aligned}&(n-1)(nU_n + U_nR) + (nU_n + U_nR)R + nA_0U_n + A_0U_nR + B_0U_n = \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\left[(n-k)A_kU_{n-k} + A_kU_{n-k}R + B_kU_{n-k}\right]\end{aligned} \qquad (12)$$

Отсюда

$$-U_0R + U_0R^2 + A_0U_0R + B_0U_0 = 0 \text{ при } n=0 \qquad (13)$$

и

$$\begin{aligned}&n(n-1)U_n + nU_nR + (n-1)U_nR + U_nR^2 + nA_0U_n + A_0U_nR + \\ &+\sum_{k=1}^{n}\left[(n-k)A_kU_{n-k} + A_kU_{n-k}R\right] + B_0U_n + \sum_{k=1}^{n} B_kU_{n-k} = 0\end{aligned} \qquad при\ n \geq 1. \quad (14)$$

Положим $U_0 = A_0 = I$. Тогда из уравнения (13) получим, что $R = \sqrt{-B_0}$, если B_0 является оператором скалярного типа. Мы здесь за R взяли однозначную регулярную ветвь (в смысле главного значения) и ее заново обозначили через R. Верна.

Теорема 2. *Пусть* B_0 является оператором скалярного типа и

$$\left(n+\sqrt{-\lambda}\right)^2 + \mu \neq 0 \quad \left(\lambda, \mu \in \sigma(B_0)\right).$$

Если ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \ \left(A_0 = I\right)$$

сходятся соответсвенно в кругах $|z| < \rho_1$, $|z| < \rho_2$, то уравнение (10) имеет решение

$$U(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k z^k\right) z^R = V(z) z^R,$$

где $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k z^k$, $V(0) = I$, $R = \sqrt{-B_0}$ и ряд этого решения сходится в круге $|z| < \rho$ $(\rho = \min(\rho_1 \rho_2))$.

Отметим также следуюший интересный результат, который недавно получен совместно с Е.Мустафаевой:

Теорема 3. *Пусть дано линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с операторными коэффициентами в пространстве* $L(X)$:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + A_1(z)\frac{dU}{dz} + A_2(z)U = 0, \tag{15}$$

где

$$A_1(z) = z^{-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} z^j, \quad A_2(z) = z^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} z^j,$$

$\alpha, \beta > 0$ *целые числа,* $0 < |z| < \rho$, *причем*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A_{1j}\| \rho^j < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \|A_{2j}\| \rho^j < \infty$$

Если

1) $\beta = 0, \alpha = 1$, *то уравнение (15) имеет решение, являющееся регулярной функцией в* $0 < |z| < \rho$,
2) $\beta > 1, \alpha > 2$, *то уравнение (15) вообще говоря не имеет регулярного решения в смысле 1) в* $0 < |z| < \rho$,
3) $\beta = 1, \alpha = 2$, *то регулярное решение уравнения возможно существует.*

Литература

[1]. E. Hille *Linear differential equations in Banach algebras*, Int. Sump. Linear Spaces, Jerusalem , 1960, Academic Press, 1967, p.263-273.
[2]. Ю.Л.Далецкий , С.Г.Крейн *Устоичивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М. 1970, 534 с.
[3]. L.Fuchs Zur Theorie der Linearen Differential-deichungen mit veranderlichen Koeffizienten. J. fur Math., 66 1866, p.121-160; 68, 1868, p. 354-385.
[4]. А.А.Ахмедов, А.А.Гаджиев *О решений некоторых классов операторных уравнений*. Труды Азерб.Матем. обш-ва, т.2, Баку, 1996, с.3-13.

Əhmədov Ə.M. **KOMPLEKS OBLASTDA OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ HAQQINDA**

Bu işdə bəzi operator əmsallı diferensial tənliklərin həllərini tapmaq məsələsi araşdırılır. Burada operator əmsalları sonlu tərtibli ueganə nolusa malikdirlər.

Akhmedov A.M. **ON THE SOLVABILITY OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN COMPLEX DOMAIN**

In this work the queston of solvability for some class differential equatins in Banach space is unverstigated. The operator coefficients as in scalarcase have unique singular point being pole of finite order.