УДК 512.57

БАБАЕВ А.А., БАЙРАМОВ Р.А.

О СИЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ В ОБЩИХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЗАМЫКАНИЕМ

Напомним (см., например, [4,7,10]), что оператором замыкания над множеством A называется экстенсивное, монотонное относительно $\subseteq$ и идемпотентное отображение $cl: 2^A \to 2^A$, где 2^A – булеан множества A, причем пара $\mathbf{A} := (A; cl)$ называется пространством с замыканием (closure space, closure structure); здесь охватываются как топологические, так и алгебраические замыкания. Экстенсивное и монотонное (но, вообще говоря, неидемпотентное) отображение $\beta: 2^A \to 2^A$ иногда называют (см. [3]) оператором гипозамыкания над A . При этом $\gamma \in \{cl, \beta\}$ называют алгебраическим оператором замыкания (соотв., гипозамыкания) над A, если для любого $D \subseteq A$ выполняется $\gamma(D) = \bigcup \left\{ \gamma(C) \middle| C \in 2^D_\omega \right\}$ где 2^D_ω – семейство всех конечных $C \in 2^D$; если вместо этого равенства выполняется - при некоторых $n < \omega$, наименьшее из коих равно n_0 – равенство $\gamma(D) = \bigcup \left\{ \gamma(C) \middle| C \in 2^D_{n+1} \right\}$ где 2^D_m – семейство всех $C \in 2^D_\omega$ мощности $|C| < m$, то назовем γ n_0 – алгебраическим.

Тройку $\mathbf{A}_\beta := (A; cl, \beta)$ назовем оснащенным пространством с замыканием, если $\mathbf{A} := (A; cl)$ является бесконечным пространсвом с замыканием, β – оператор гипозамыкания со свойством $\beta(\varnothing) = \varnothing \wedge (\forall x \in A) \beta(\{x\}) = \{x\}$ и операторы cl, β связаны условием

$$\beta << cl \xleftrightarrow{def} (\forall D \subseteq A)(2 \le |D| < |A| \Rightarrow \beta(D) \subset cl(D)).$$

Множество $M \subseteq A$ в пространстве с замыканием $\mathbf{A} := (A; cl)$ называется $\mathbf{A}$- независимым или cl- независимым, если для любого $x \in M$ выполняется $x \notin cl(M \setminus \{x\})$. Для $M \subseteq A$ мощности $|M| \ge 2$ в оснащенном $\mathbf{A}_\beta := (A; cl, \beta)$ по выявленным в [1,2,5,6] причинам оказывается полезным понятие β-сильной cl-независимости, определяемое следующими двумя условиями:

1) для любого $x \in M$ $cl(\{x\} \cup (\beta(M) \setminus M)) = cl(M)$;
2) для любого (в частности, пустого) $M_1 \subset M$ выполняется

$$(M \setminus M_1) \cap cl(M_1 \cup (\beta(M \setminus M_1) \setminus (M \setminus M_1))) = \varnothing.$$

Очевидно, для любого $x \in M$ при $M_1 = M \setminus \{x\}$ условие (2) превращается в $x \notin cl(M \setminus \{x\})$; следовательно, всякое β-сильно cl-независимое M является cl- независимым.

Оператор клонового замыкания [8] является алгебраическим оператором замыкания над множеством F_B всех финитарных функций $f : B^n \to B(1 \le n < \omega)$, а оператор дедуктивного замыкания по правилам эквациональной логики [9] является алгебраическим оператором замыкания над множеством всех тождеств фикисированной сигнатуры. В [1,2] были изучены триангуляционно - сильно независимые (сокращенно, TR- сильно независимые) системы финитарных функций. Здесь мы, обобщая и модифицируя на универсально - алгебраический уровень введенное в [5,6] понятие вполне независмой системы групповых тождеств, введем и изучим псевдотранзитивно сильно (сокращенно, PT- сильно) независимые системы тождеств.

Пусть ϑ_Ω – многообразие всех алгебр сигнатуры Ω и I_Ω- множество всех тождеств этой сигнатуры. Через ϑ_Ω^* обозначим глобальное (в рассматриваемом контексте) подмногообразие в ϑ_Ω; например, при $\Omega = \{\cdot\}$ ϑ_Ω будет многообразием всех группоидов, а глобальным для теории полугрупп будет многообразие $\vartheta_\Omega^* = SG$ всех полугрупп. Всюду предполагается, что Ω содержит хотя бы один символ арности >0, и рассматриваются лишь подмногообразия $\vartheta \subseteq \vartheta_\Omega^*$. Пусть, далее: $I(\vartheta)$ – эквацианаоьная теория многообразия ϑ; для $\Delta \subseteq I_\Omega [\Delta]_{eq}$ означает порожденную системой Δ эквациональную теорию; $\mathrm{var}[\Delta]$ – задаваемое системой Δ многообразие и $\mathrm{var}_*[\Delta] := \mathrm{var}[\Delta \cup I(\vartheta_\Omega^*)]$, т.е. подмногообразие, выделяемое системой Δ в ϑ_Ω^*. Очевидно, $[\Delta]_{eq} = I(\mathrm{var}[\Delta])$. Псевдотранзитивной оболочкой $PT(\sum)$ системы тождеств $\sum := \{t'_\lambda = t''_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ (где $|\Lambda| \ge 2$) из I_Ω назовем результат добавления к $\sum$ всех тождеств $t'_\lambda = t'_\delta$ и $t''_\lambda = t''_\delta$, где $\lambda \ne \delta (\lambda, \delta \in \Lambda)$, а множество $\widetilde{PT}(\sum) := PT(\sum) \setminus \sum$ назовем PT - наростом над $\sum$. Содержащую хотя бы два тождества систему $\sum \subseteq I_\Omega$ назовем PT – сильно независимой относительно многообразия $\vartheta \subseteq \vartheta_\Omega^*$, если $\widetilde{PT}(\sum) \subset [\sum]_{eq} \setminus \sum$ и для любой собственной подсистемы $\tilde{\sum} \subset \sum$ никакое тождество $\sigma \in \sum \setminus \tilde{\sum}$ невыводимо в многообразии ϑ из $\tilde{\sum} \cup \widetilde{PT}(\sum \setminus \tilde{\sum})$; иначе говоря, из $\tilde{\sum}\cup \tilde{PT}(\sum\setminus\tilde{\sum})\cup I(\vartheta)$ невыводимо*) –как в ϑ_Ω, так и в глобальном

многообразии ϑ^*_Ω - никакое $\sigma\in\sum\setminus\tilde{\sum}$. Когда ϑ совпадает с глобальным

многообразием, приставку «относительно ϑ» отбрасываем и называем $\sum$ PT–сильно независимой системой тождеств.

Многообразие называется ϑ - критическим, если все его собственные подмногообразия содержатся в ϑ , но само оно в ϑ не содержится. Аналогично, оно называется σ - критическим (где σ -некоторое тождество), если σ истинно на всех его собственных подмногообразиях, но ложно на нем самом. Многообразие называется (см. например, [4]) аддитивно вполне неразложимым, если оно обладает наибольшим собственным подмногообразием (и поэтому не порождается своими собственными подмногообразиями) . Очевидно, всякое аддитивно вполне неразложимое многообразие ϑ является σ -критическим при некотором $\sigma\notin I(\vartheta)$, и следовательно, является $\mathrm{var}[\sigma]$ – критическим. Также очевидно, что всякое ϑ - критическое и всякое σ -критическое многообразия являются аддитивно вполне неразложимыми. С другой стороны, стандартное применение леммы Цорна показывает, что в произвольном многообразии ϑ для всякого тождества $\sigma\notin I(\vartheta)$ существует хотя бы одно σ - критическое подмногообразие.

Теорема 1. *Если существует бесконечная PT- сильно независимая относительно многообразия ϑ (не более, чем счетной сигнатуры) система тождеств, то в ϑ содержится несчетно много (континуум) аддитивно вполне неразложимых подмногообразий.*

Доказательство. Пусть $\sum:=\{t'_\lambda=t''_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ удовлетворяет условию теоремы. Для $\tilde{\Lambda}\subseteq\Lambda$ положим $\vartheta_{\tilde{\Lambda}}=\mathrm{var}[I(\vartheta)\cup\{t'_\lambda=t''_\lambda:\lambda\in\tilde{\Lambda}]\cup$

$\cup\tilde{PT}(\{t'_\lambda=t''_\lambda:\lambda\in\Lambda\setminus\tilde{\Lambda}\})]$. Если $\lambda\notin\tilde{\Lambda}$, то в силу PT –сильной независимости $\sum$ относительно ϑ верно $\sigma_\lambda=(t_{\lambda'}=t_{\lambda''}\notin I(\vartheta_{\tilde{\Lambda}})$ и поэтому в $\vartheta_{\tilde{\Lambda}}$ существует хотя бы одно σ_λ- критическое подмногообразие; зафиксируем одно из них и обозначим через $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}}$. Так как все такие $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{\Lambda}\subset\Lambda)$ аддитивно вполне неразложимы, то достаточно доказать, что $\tilde{\Lambda}_1\neq\tilde{\Lambda}_2$ влечет $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_1}\neq\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_2}$. В силу $\sigma_\lambda\in I(\vartheta_\Lambda)\setminus I(\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}})$, где $\lambda\notin\tilde{\Lambda}$, имеем

*)равносильность этих невыводимостей следует из включения $I(\vartheta)\supseteq I(\vartheta^*_\Omega)$, обеспечиваемого условием $\vartheta\subseteq\vartheta^*_\Omega$.

$\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}}\not\subseteq\vartheta_\Lambda$. Если бы $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_1}=\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_2}$ при $\tilde{\Lambda}_1\neq\tilde{\Lambda}_2$, то имели бы $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_1}\cap\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_2}=\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_1}=\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_2}$, откуда $\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_1}\cap\vartheta^*_{\tilde{\Lambda}_2}\subseteq\vartheta_\Lambda$. Поэтому для доказательства импликации $\widetilde{\Lambda}_1 \neq \widetilde{\Lambda}_2 \Rightarrow \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_1} \neq \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_2}$ достаточно установить верность импликации $\widetilde{\Lambda}_1 \neq \widetilde{\Lambda}_2 \Rightarrow \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_2} \subseteq \vartheta_\Lambda$. А так как $\vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_2} \subseteq \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2}$, то достаточно проверить ипликацию $\widetilde{\Lambda}_1 \neq \widetilde{\Lambda}_2 \Rightarrow \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2} = \vartheta_\Lambda$. Очевидно $\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1}, \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2} \neq \vartheta_\Lambda$. Пусть $\lambda_1 \notin \widetilde{\Lambda}_1 \setminus \widetilde{\Lambda}_2$. Тогда $I(\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2}) \supseteq I(\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1}) \cup I(\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2}) \supseteq$ $\supseteq \{t'_\lambda = t''_\lambda : \lambda \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2\}$. Так как $\lambda_1 \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2$, то $\widetilde{PT}(\{t'_\lambda = t''_\lambda : \lambda \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2\})$ содержит $\{t'_{\lambda_1} = t'_\lambda : \lambda \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2\} \cup \{t'_\lambda = t''_\lambda : \lambda \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2\}$, откуда в силу транзитивности

$$I(\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2}) \supseteq \{t'_\lambda = t''_\lambda : \lambda \in \widetilde{\Lambda}_1 \cup \widetilde{\Lambda}_2\} \cup \{t'_\lambda = t''_\lambda : \lambda \in \Lambda \setminus \widetilde{\Lambda}_2\} = \sum$$

и, следовательно, $I(\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2}) = I(\vartheta_\Lambda)$, т.е. $\vartheta_{\widetilde{\Lambda}_1} \cap \vartheta_{\widetilde{\Lambda}_2} = \vartheta_\Lambda$. Итак для $\widetilde{\Lambda}_1, \widetilde{\Lambda}_2 \subset \Lambda$ верна импликация $\widetilde{\Lambda}_1 \neq \widetilde{\Lambda}_2 \Rightarrow \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_1} \neq \vartheta^*_{\widetilde{\Lambda}_2}$; тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Если среди систем тождеств, выделяющих в глобальном многообразии многообразие $\mathcal{W}$, существует хотя бы одна бесконечная PT-сильно независимая относительно некоторого многообразия ϑ, то $\mathcal{W} \cap \vartheta$ имеет несчетно много (а при не более, чем счетной сигнатуре – в точности континуум) покрывающих многообразий, содержащихся в ϑ. В частности, при ϑ, совпадающем с глобальным многообразием: если $\mathcal{W}$ можно задать в глобальном многообразии бесконечной PT – сильно независимой системой тождеств, то $\mathcal{W}$ имеет несчетно много (соотв., континуум) покрывающих многообразий.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай, когда ϑ совпадает с глобальным многообразием ; общий случай проверяется аналогично. Пусть $\sum$ - бесконечная PT - сильно независимая система тождеств, $\mathcal{W}$-задаваемое ею (в глобальном многообразии) многообразие и I- его эквациональная теория; пусть также $\sum := \{t'_\lambda = t''_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$. Так же, как в доказательстве теоремы I для $\widetilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$, но уже при глобальном ϑ рассматриваем $\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda}}$ (тогда при $\widetilde{\Lambda} \subset \Lambda$ $\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda}} \supset \mathcal{W}_\Lambda = \mathcal{W}$) и при $\lambda \in \widetilde{\Lambda}(\widetilde{\Lambda} \subset \Lambda)$ имеем $\sigma_\lambda := (t'_\lambda = t''_\lambda) \notin I(\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda}})$. Тогда по лемме Цорна среди эквациональных теорий T с условием $I(\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda}}) \subseteq T \subseteq I(\mathcal{W}_\Lambda) \setminus \{\sigma_\lambda\}$ существует хотя бы одна максимальная; зафиксируем одну из них и обозначим через $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}$, а задаваемое ею многообразие – через $\mathcal{W}^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}$ (таким образом, $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda} = I(\mathcal{W}^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda})$). Покажем, что $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}$ является максимальной не только среди эквациональных теорий T с условием $I(\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda},\lambda}) \subseteq T \subseteq I(\mathcal{W}_{\widetilde{\Lambda}.}) \setminus \{\sigma_\lambda\}$, но вообще, среди всех отличных от $I(\mathcal{W}_{\Lambda.})$ эквациональных теорий $T \subseteq I(\mathcal{W}_{\Lambda.})$.

Пусть существует эквациональная теория T' такая, что $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda} \subset T' \subseteq I(\mathscr{W}_{\Lambda})$. Тогда по определению $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}$ имеем $\sigma_\lambda \in T'$, а, так как еше и $T' \subseteq I(\mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}})$, то $T' \supseteq I(\mathrm{var}[\{t'_\lambda = t''_\lambda \mid \lambda \in \widetilde{\Lambda}\}] \vee \mathrm{var}[\sigma_\lambda])$ и аналогично доказательству теоремы 1 имеем $T' = I(\mathscr{W}_{\Lambda})$.

Итак $T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}$ является максимальной подтеорией в $I(\mathscr{W}_{\Lambda})$, содержащей $(\mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}})$, и, следовательно $\mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda} = \mathrm{var}\left[T^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda}\right]$ является покрывающим многообразием для $\mathscr{W}_{\Lambda} = \mathscr{W}$, причем содержащимся в $\mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}}$. Для завершения доказательства остается проверить верность импликации

$$\widetilde{\Lambda}_1 \neq \widetilde{\Lambda}_2 \wedge \lambda_1 \notin \widetilde{\Lambda}_1 \wedge \lambda_2 \notin \widetilde{\Lambda}_2 \Rightarrow \mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda}_1,\lambda_1} \neq \mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda}_2,\lambda_2}$$

Так как $\mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda},\lambda} \supset \mathscr{W}_{\Lambda} = \mathscr{W}$ при $\widetilde{\Lambda} \subset \Lambda, \lambda \notin \widetilde{\Lambda}$, то достаточно в предположении верности посылки проверить, что $\mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda}_1,\lambda_1} \cap \mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda}_2,\lambda_2} = \mathscr{W}_{\Lambda}$. Верность последного следует из доказанного ранее (в доказательстве теоремы 1) равенства $\mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}_{11}} \cap \mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}_2} = \mathscr{W}_{\Lambda}$ и условий $\mathscr{W}^*_{\widetilde{\Lambda}_i,\lambda_i} \subseteq \mathscr{W}_{\widetilde{\Lambda}_i}$ $(i = 1,2)$. Доказательство теоремы в случае глобального ϑ завершено. Как уже отмечалось, общий случай исчерпывается совершенно аналогично. Теорема доказана.

Сравнение выщеизложенного с [2,5,6] показывает, что между *TR*- сильно независимыми системами финитарных функций и *PT*- сильно независимыми системами тождеств много общего, в частности, *PT*- наросты над множествами тождеств играют роль, аналогичную роли *TR*- наростов над множествами функций. Эта общность лучше всего проясняется в рамках оснащенных пространств с замыканием: для всякого такого пространства $\mathbf{A}_\beta := (A; cl, \beta)$ с алгебраическим cl и n - алгебраическим (для некоторого n) оператором гипозамыкания β можно доказать теоремы, частными случаями которых окажутся теоремы 1,2 (соответственно), а также теоремы 5,6 из [2].

Является ли аналогия между *TR*- сильно независимыми множествами финитарных функций и *PT*- сильно независимыми системами тождеств полным параллелизмом? Различия между поведениями финитарных функций и тождеств (например, семейство всех функций арности $\leq n$ в любой конечнозначной логике конечно, тогда как семейство попарно неэквивалентных тождеств даже от двух переменных, истинных на конечной алгебре, может быть бесконечным) позволяют высказать гипотезу об отрицательном решении поставленного вопроса. Эта гипотеза подверждается сравнением построенного в [5,6] примера бесконечной вполне независимой системы групповых тождеств с теоремой 5 из [1] , утверждающей отсутствие в конечнозначных логиках бесконечных *TR*- сильно независимых подмножеств.

В этой связи целесообразно явно сформулировать два (хотя и очевидных) следствия теорем 1, 2:

Следствие 1. *Если многообразие ϑ содержит не более счетного числа аддитивно вполне неразложимых подмногообразий, то не существует бесконечных PT- сильно независимых относительно ϑ систем тождеств.*

Следствие 2. *Если многообразие $\mathcal{W} \cap \vartheta$ имеет не более счетного числа покрытий в интервале $[\mathcal{W} \cap \vartheta, \vartheta]$, то $\mathcal{W}$ нельзя выделить в глобальном многообразии никакой бесконечной PT-сильно независимой относительно ϑ системой тождеств.*

Литература

[1]. Бабаев А.А., Байрамов Р.А., Шарифов Т.К. *О стабилизаторных представлениях и специальных базисах клонов финитарных функций и отношений* . Труды ИММ АН Азерб., 1997, т.VII. с.39-50.

[2]. Bairamov R.A. *On independent sets of functions in finite-valued logics* .Proc. of 12th Internat. Symp. On MVL, Paris, 1982, p.114-116.

[3]. Bairamov R.A. *Some new results in the theory of function algebras of finite- valued logics.* Colloq. Math. Soc. J.Bolyai, 1981, v.28, p.41-66.

[4]. Gratzer G. *Universal algebra,* Springer Verlag, 1979.

[5]. Клейман Ю.Г. *О порождаемости многообразий групп некоторыми классами групп.* Сибирский матем. журнал. 1982, т.23, №6, с.117-132.

[6]. Клейман Ю.Г. *О некоторых вопросах теории многообразий групп.* Изв. АН СССР, 1983, т.47, №1, с.37-74.

[7]. Кон П. *Универсальная алгебра* (пер.с англ.), Мир, 1968.

[8]. Szendrei A. *Clones in universal algebra,* Montreal, 1986.

[9]. Taylor W. *Equational logic.* Houston J. of Math., Survey - 1979.

[10]. Wilke G., Erne M. *Standard completions for quasiordered sets* .Semigroup Forum, 1983, v. 27, p.351-37.

Babayev Ə.Ə., Bayramov R.A.

ÜMUMİ VƏ XÜSUSİ QAPALILIQ FƏZALARINDA GÜCLÜ QEYRİ-ASILILIQ HAQQINDA

Eyniliklər sistemi üçün *PT*- güclü qeyri-asılılıq (yəni psevdotranzitiv örtüyə görə qeyri-asılılıq) anlayışı araşdırılır. Ekvasional məntiq, finitar funksiyalar klonları və ümumi qapalılıq fəzaları üçün güclü qeyri-asılılıq anlayışları müqayisə olunur.

Babaev A.A., Bairamov R.A.

ON STRONG INDEPENDENCE IN GENERAL AND SPECIAL CLOSURE SPACES

We investigate *PT*- strongly independent (i.e. strongly independent w.r.t. pseudotransitive hull) systems of identities and compare the situations for equational logic, clones of finitary functions and general cloure spaces.