УДК 517.5

**БАБАЕВ М-Б.А.**

# О ПОРЯДКЕ УКЛОНЕНИЯ ОТ МНОГООБРАЗИЯ СМЕШАННЫХ ПАРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В последние десятилетия многообразие комбинаций функций меньшего числа переменных прочно стало в ряд классических аппаратов приближения привлекая к себе все большее внимание емкими результатами и широкими возможностями приложений как в теоретических исследованиях, так и в прикладных задачах (см. например, литературу в [1-6]).

Рассмотрим пространство $L_p = L_p(K)$ функций $f = f(x)$, $x = (x_1,...,x_l) \in \mathbf{R}^l$ опеделенных на кубе $K = I^l$, $I = [0,1]$.

Пусть $\mathscr{T} = \{u,v\}, uv \subset \{x_1,...,x_l\}; u \cup v = \{x_1,...,x_l\}$.

Обозначим

$$G^M(\mathscr{T}) = \left\{ g / g = \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(u)\psi_k(v), \varphi_k\psi_k \in L_p(K) \right\}.$$

Назовем уклонением компакта $Q \subset L_p$ от многообразия $G^M(\mathscr{T})$ в $L_p$ выражение

$$\tau_M = \tau_{M\mathscr{T}}(Q)_p = \tau(Q, G^M(\mathscr{T}), L_p) = \sup_{f \in Q} \inf_{g \in G^M(\mathscr{T})} \|f - g\|_p .$$

Обозначим через $W_q^r$ соболевское пространство функций многих переменных, определенных ограничениями на смешанную производную (см., напр., в [4]).

Далее порядковое равенство $\tau_M \sim \theta_M$ эквивалентно двустронним оценкам $C_1\theta_M \le \tau_M \le C_2\theta_M$, а неравенство $\tau_M >> \theta_M$ неравенству $C_2\theta_M \ge \tau_M (M \in \mathbf{N})$ с константанми $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ , не зависящими от M. Пусть $|u|$ число переменных множества u.

Обозначим $\gamma = \max\{|u|.v\}$,

Ниже $a \sim b$ означает порядковое равенство $c_1 a \le b \le c_2 a$, а $a >> b$ $(b >> c)$ порядковое неравенство $c_1 a \le b$ $(c_2 b >> c)$, где константы $c_1$ и $c_2$ удовлетворяют соотношению $0 < c_1 \le c_2 < \infty$.

Основым результатом настоящей работы является.

**Теорема.** *При* $2 \le q \le p \le \infty$ *и* $r > \frac{l}{q} - \frac{\gamma}{p}$ *справедливо равенство*

$$\tau_{M\Gamma}(W_q^r)_p \sim M^{-\frac{1}{l-\gamma}\left(r-\frac{\gamma}{q}+\frac{\gamma}{p}\right)+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

Начиная с 1982 года в цикле работ В.Н.Темлякова были исследованы приближения классов периодических функций Соболева $W_{q,\alpha}^{\tilde{r}}, SW_{q,\alpha}^{r}$ и Никольского $H_q^{\tilde{r}}, NH_q^r$ (см., напр.,[1-2]) билинейными формами в случае, когда группы переменных не пересекаются и в основом, когда они имеют одинаковое число переменных. Им были установлены порядки приближения практически для всех $p$ и $q: 1 \le p, q \le \infty$.

Нами в ряде работ установлены (см., напр., [4-6]) порядки $\tau_M$ для класса $W_q^r$ вообще непериодических функций для различных $p$ и $q$ в случае, когда группы $u$ и $v$ не пересекаются, но могут содержать различное число переменных.

Вышеприведенная теорема является первым результатом о нахождении порядка уклонения от многообразия билинейных форм, когда группы переменных имеют непустое пересечение.

**Доказательство.** Случай $u \cap v = \emptyset$ рассмотрен в [6]. Пусть $u \cap v = \emptyset$. Для определенности и не умаляя общности положим $u = \{x_1, \dots, x_{|u|}\}$ $v = \{x_s, x_{s+1}, \dots, x_l\} = \{x_{l-|u|+1}, \dots, x_{|u|}, \dots, x_l\}$ и $|u| \ge v$. В отличие $u \cap v = \emptyset$ от случая теперь $v \ne \{x_{|u|+1}, \dots, x_l\}$ ,т.е. $l - |u|$ не является числом переменных группы $v$.

Обозначим через $\Gamma = (u_1, v_1)$ деление переменных $x_1, \dots, x_l$ на две группы $u_1, v_1$ когда эти группы не пересекаюся :

$u_1 \cap v_1 = \emptyset$, $u_1 \cup v_1 = \{x_1, \dots, x_l\}$

Посклькy $G^M(\Gamma) \subset G^M(\mathscr{T})$ то согласно определению $\tau_M$

$$\tau_{M\mathscr{T}}(W_p^r)_p \le \tau_{M\Gamma}(W_p^r)_p$$

и поэтому оценка сверху $\tau_{M\Gamma}(W_q^r)_p$ установленная в [6] при $2 \le q \le p \le \infty$ для случая $u \cap v = \emptyset$ является оценкой сверху также $\tau_{M\mathscr{T}}(W_p^r)_p$ . Таким образом нам следует доказать оценку снизу в (1) при $u \cap v = \emptyset$.

Выберем натуральное $m \ge 2$ из условия $\alpha m^{l-|u|} < M < \beta m^{l-|u|}$, где $\alpha = 1/2^{l-|u|+1}$, $\beta = 1/2$ (это всегда возможно, так как при таких $\alpha$ и $\beta$ множество интервалов $(\alpha m^{l-|u|}, \beta m^{l-|u|})$ покрывает интервал $(1/2, \infty)$. Обозначим через $\bar{J}$ множество из $m^l$ мультииндексов:

$$\bar{J} = \bar{J}_l = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_l, 1 \le i_j \le m, \quad j = \overline{1,l}\}$$

Разобъем куб $K = [0,1]^l$ на $m^l$ кубов

$$K_{\bar{i}} = \left\{ x \left| \frac{i_j - 1}{m} \le x_j \le \frac{i_j}{m}; \bar{i} = (i_1, \dots, i_l) \in \bar{J} \right. \right\}$$

и рассмотрим в $\mathbf{R}^l$, $m^l$ функций

$$S_{\bar{i}}(x) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{l} \left|\sin^{\rho}(\bar{n} m x_j)\right), & \rho > r, \quad x \in K_{\bar{i}}, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^l \setminus K_{\bar{i}}. \end{cases}$$

**Лемма 1.([4]).** *Для произвольных* $p \ge 1, \bar{i} \in \bar{J}$ *и целых* $r_j \ge 0 \left( j = \overline{1,l}, \sum_{j=1}^{l} r_j = r \right)$ *имеет место равенство*

$$\left( \int_{K_{\bar{i}}} \left| S_{\bar{i}}^{(\tilde{r})}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} = C_{\tilde{r},p} m^{r - \frac{l}{p}}, \quad \tilde{r} = (r_1, \dots, r_l),$$

*где* $C_{\tilde{r},p}$ *константа, зависящая лишь от* $l, \rho, r$ *и* $p$.

Рассмотрим множество

$$s_m = \left\{ \xi_{\bar{i}} = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_l} \left| \xi_s = \frac{s-1}{m}, s = \overline{1,m}; \bar{i} \in \bar{J} \right. \right\}$$

вершин кубов $K_{\bar{i}}$ и построим в $\mathbf{R}^{m^l}$ многообразие

$$G_m^{M\Gamma_1} = \begin{cases} n \in R^{m^{2(l-|u|)}} / h = \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_{l-|u|}) \psi_k(\xi_{|u|+1}, \dots, \xi_l) \\ \varphi_k, \varphi_k - \text{вещественные функции} \end{cases}$$

**Лемма 2.** *([6]). Пусть* $m^{l-|u|} \sim M$. *Тогда*

$$\tau\left( B_q^{m^{2(l-|u|)}}, G_m^{M\Gamma_1} l_p^{m^{2(l-|u|)}} \right) >> M^{1-2/q}$$

**Лемма 3.** *При* $m^{l-|u|} \sim M$ *и* $2 \le q \le p \le \infty$ *справедлива оценка*

$$\tau\left( B_q^{m^l}, G^M(\mathscr{T}), l_p^{m^l} \right) >> M^{2(1/p - 1/q)}$$

**Доказательство.** Положим

$$f_{\alpha\beta} = \exp \frac{2\bar{\pi} i \beta(\xi_{|u|+1}, \dots, \xi_1)[\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{|u|+1})]}{m^{l-|u|}},$$

где $\alpha$ и $\beta$ взаимно-однозначное отображение между множествами

$$\underbrace{\{1,..,m\} \times \ldots \times \{1,\dots,m\}}_{l-|u|} \quad \text{и} \quad \left\{1,\dots,m^{l-|u|}\right\}$$

Полагая $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ определим в пространстве $\mathbf{R}^{m^l}$ вектор

$$\tilde{f}_\xi = \begin{cases} \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{2(l-|u|)/q}}, & \text{если } \xi_{l-|u|+1} = \ldots = \xi_{|u|} = 1; \\ 0, \quad \text{если} & \prod_{j=l-|u|+1}^{|u|} \xi_j > 1, \text{ т.е. когда хотя бы один из } \xi_j, j = \overline{l - |u| + 1, |u|} \\ & \text{больше } I \end{cases}$$

В [6] установлена, что $\widetilde{f}_\xi \in B_q^{m^l}$.

Имеем

$$\tau\left(B_q^{m^l}, G_m^{M\mathcal{F}}, l_p^{m^l}\right) \geq \rho(\widetilde{f}_\xi, G_m^{M\mathcal{F}} l_p^{m^l}) =$$

$$= \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1,M}} \left( \sum_{\xi_1, \ldots, \xi_l = 1}^{m} \left| \widetilde{f}_\xi - \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{|u|}) \psi_k(\xi_{l-|u|+1}, \ldots, \xi_l \right|^p \right)^{1/p} =$$

$$= \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1,M}} \left( \sum_{\substack{\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|}, \\ \xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l}} \left| \widetilde{f}_{\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|} 1, \ldots, 1 \xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{1-|u|}, 1, \ldots, 1) \psi_k(1, \ldots, 1 \xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l) \right|^p \right)^{1/p}$$

Используя неравенство Гельдера продолжим оценку

$$\geq m^{(|u|-l)\left(1-\frac{2}{p}\right)} \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1,M}} \left( \sum_{\substack{\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|} = 1 \\ \xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l = 1}}^{m} \left| \widetilde{f}_{\xi_1, \ldots, \xi_{l-|u|} 1 \ldots 1 \xi_{|u|+1} \ldots \xi_l} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=1}^{M} \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_{1-|u|}, 1, \ldots, 1) \psi_k(1 \ldots 1, \xi_{|u|+1}, \ldots, \xi_l) \right|^2 \right)^{1/2}$$

Для завершения доказательства леммы 3 остается применять лемму 2 и продолжить оценку следующим образом

$$\gg m^{(|u|-l)\left(1-\frac{2}{p}\right)} M^{1-\frac{2}{q}} \gg M^{-\left(1-\frac{2}{p}\right)} M^{1-\frac{2}{q}} = M^{2(1/p-1/q)}$$

Лемма 3 доказана.

Каждому вектору $h \in B_q^{m^l}$ соотнесем функцию

$$H(x) = b_m \sum_{\bar{i} \in \bar{J}} h_{\bar{i}} - S_{\bar{i}}(x),$$

где $b_m c^* m^{-r+l/q}$. Выбирая $c^*$ из условия

$$c^* \leq \min\left\{ c_{0,q}^{-1} \left( \sum_{|\bar{\gamma}|=r} c_{\bar{\gamma},p} \right)^{-1} \right\},$$

где $C_{\bar{\gamma},q}$ – константа из леммы I, нетрудно убедиться в том, что функция *H(x)* принадлежит классу $W_q^r$. Для этого на до использовать принадлежность вектора $h$ единичному шару $B_q^{m^l}$ и действовать аналогично тому, как в [4] было показано, принадлежность функции *S(x)* классу $W_q^r(K)$.

Определим множество функций

$$Q_q^r = \left\{ H(x) / H(x) = b_m \sum_{\bar{i} \in \bar{J}} h_{\bar{i}} s_{\bar{i}}(x), h \in B_q^{m^l} \right\}$$

Ясно, что $Q_q^r \subset W_q^r$ и поэтому

$$\tau(W_q^r, G^M(\mathscr{T}), L_p) \geq \tau(Q_q^r, G^M(\mathscr{T}), L_p) \tag{2}$$

Какие бы ни были $H \in Q_q^r$ и имеем $g \in G^M(\mathscr{T})$

$$\|H - g\|_p^p = \int_K |H(x) - g(x)|^p dx = \sum_{\bar{i} \in \bar{J}} \int_{K_{\bar{i}}} |H(x) - g(x)|^p dx =$$

$$= \int_{K_{\bar{i}}} \left[ \sum_{\bar{i} \in \bar{J}} |H(x + \xi_{\bar{i}}) - g(x + \xi_{\bar{i}}|^p \right] dx$$

Зафиксируем $x \in K_{\bar{1}}$, $H(x + \xi_{\bar{i}}) = b_m s_{\bar{i}}(x) h_{\bar{i}}$ .Согласно лемме 3 существует вектор $h \in B_q^{m^l}$ , такой, что

$$\inf_{\vartheta \in G_m^{M\mathscr{T}}} \|h - \vartheta\|_{l_p^{m^l}} >> M^{2(1/p - 1/q)}.$$

Тогда

$$\inf_{\vartheta \in G_m^{M\mathscr{T}}} \left( \sum_{\bar{i} \in J} | \; b_m s_{\bar{1}}(x) h_{\bar{i}} - \vartheta(x + \xi_{\bar{i}}) \; |^p \right)^{1/p} =$$

$$= b_m s_{\bar{1}} \inf_{\vartheta \in G_m^{M\mathscr{T}}} \left( \sum_{\bar{i} \in J} | \; h_{\bar{i}} - \vartheta(x + \xi_{\bar{i}}) \; |^p \right)^{1/p} >> b_m s_{\bar{1}}(x) M^{1(1/p - 1/q)}.$$

Учитывая, это для функции *H(x)* согласно (3) и лемме I имеем

$$\|H - g\|_p \geq \left( \int_{K_1} b_m^p s_{\bar{1}}(x) M^{2p(1/p - 1/q)} dx \right)^{1/p} =$$

$$= b_m M^{2(1/p - 1/q)} \|S_{\bar{1}}(x)\|_{L_p(K_1)} = C_{\bar{r}, p} m^{-l/p} b_m M^{2(1/p - 1/q)} >>$$

$$>> m^{-l/p} m^{-r + l/q} M^{2/p - 2/q} = m^{-r} m^{l(1/q - 1/p)} M^{2/p - 2/q} >>$$

$$>> M^{-\frac{r}{l - |u|}} M^{-\frac{l}{l - |u|}(1/p - 1/q)} M^{2(1/p - 1/q)} =$$

$$>> M^{-\frac{r}{l - |u|}} M^{(1/p - 1/q)(2 - 1/l - (u))} = M^{-\frac{r}{l - |u|}} M^{(1/p - 1/q)(l - 2|u|/l - |u|} =$$

$$M^{-\frac{1}{l - |u|}\left(r - \frac{|u|}{q} + \frac{|u|}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

откуда в силу произвольности $g$ и $H$ соответственно из классов $G^M(T)$ и $Q_q^r$ и соотношения (2) следует требуемая оценка снизу для $\tau_{MT}(W_q^r)_p$.

Теорема доказана полностью.

### Литература


[1]. Темляков В.Н. *О наилучших билинейных приближениях периодических функций многих переменных.* ДАН СССР, 1986, т. 286, № 2, с.301-304.

[2]. Темляков В.Н *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*. Труды МИАН, 1986, т, 178, с.1-112.

[3]. Бабаев М-Б.А. *О наилучшем приближении билинейными формами.* Математические заметки, 1989, т.46, вып. 2, с.21-33.

[4]. Бабаев М-Б.А. *О порядке приближения соболевского класса* $W_q^r$ *билинейными формами в* $L_p$ *при* $1 \le q \le p \le 2$. Математический сборник. 1991, т. 82, №1, с.122-129.

[5]. Бабаев М-Б.А. *О порядке приближения соболевского класса* $W_q^r$ *билинейными формами в* $L_p$ *при* $1 \le q \le p \le 2$. Труды МИАН , 1992, т.198, с.21-40.

[6]. Бабаев М-Б.А. *Приближение соболевских классов* $W_q^r$ *функций многих переменных билинейными формами в* $L_p$ *при* $1 \le q \le p \le 2$. Матем. заметки, 1997, т.62, вып. 1,с.18-34.


**Babaev M-B.Ə. QARIŞIQ CÜT HASİLLƏRDƏN MEYLİN TARTİBİ HAQQINDA**


İşdə $W_q^r$ Sobolev siniflərinin $L_p$ fəzasında $2 \le q \le p \le \infty$ olduqda qarışıq bixətti formalardan meylilin tərtibi tapılmışdır.


**Babaev M-B.A. ON THE DEGREE OF APPROXIMATION BY THE MIXED TWIN PRODUCTS**


In this paper we found the degree of approximation of the Sobolev classes $W_q^r$ by mixed bilinear forms in $L_p$ for $2 \le q \le p \le \infty$.