УДК 517.51

ГУЛИЕВ В.С.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ *B*-ГАРМОНИЧЕКСКОГО АНАЛИЗА

В классической теории приближений функций, в теории функциональных пространств большую роль играет оператор сдвига $f(x) \to f(x+t)$ и связанная с ним техника анализа Фурье. Естественным обобщением операторов сдвига на R является операторы обобщенного сдвига (ООС) Дельсарта-Левитана [1], которые могут быть построены по произвольному дифференциальному оператору Штрума-Лиувилля на R . Операторы обобщенного сдвиги образуют однопараметрическое семейство, Которое не является группой или полугруппой операторов,
но тем не менее многие задачи гармонического анализа можно обобщать, используя обобщенные сдвиги вместо обычных. В частности можно построит теории максимальных функций и строить новые функциональные пространства, аналогичные класссическим

В работе [2] введены и изучены B-пространства BMO. Принципиальное отличие рассмотренных нами B- интегральных операторов и B-пространств от обычных заключается в том, что сингулярность в дифференциальном операторе Бесселя B-«заставляет» работать в верхнем полупространстве R_+^n и использовать некоторый сдвиг, приспособленный к оператору Бесселя B.

Пусть $R^n - n-$мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$,
$|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $R_+^n = \{x, x \in R^n, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in (0,\infty)^n$,
$|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, $x^\gamma = x^{\gamma_1},\ldots,x^{\gamma_n}$, при $p \ge 1$, $L_p^\gamma(R_+^n)$ – пространство, состоящее из функций f, четных по переменным $x_1,\ldots,x_n$ с нормой

Такие функциональные пространства (введеные в [1]) приспособлены для работы с обобщенным сдвигом вида

$$T^y f(x) = \pi^{\frac{-n}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\gamma_i + \frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}(\gamma_i) \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \times$$
$$\times f\left(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\alpha_1 + y_1^2}, \ldots, \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha_n + y_n^2}\right) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

Отметим, что этот тесно связан [2] с дифференциальным оператором Бесселя

$$B = (B_1, \ldots B_n), \quad \text{где} \quad B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Многочисленные исследования показывают, что вопросах, связанных с обобщенными сдвигами или дифференциальным оператором Бесселя B роль обычных пространств $L_p(R^n)$ играет весовое пространство $L_p^\gamma(R_+^n)$ и поэтому в дальнейшем часто пространство $L_p^\gamma(R_+^n)$ будем обозначать через $BL_p(R_+^n)$ или просто BL_p.

Определим введенное в [2] B- максимальную функцию следующим образом

$$M_B f(x) = \sup_{r>0} (\mu B_+(0,r))^{-1} \int_{B_+(0,r)} |T^y f(x)| y^\gamma dy$$

Здесь $\mu E = \int_E x^\gamma dx$ и $B_+(0,r) = \{y \in R_+^n, |y| \le r\}$– полушар радиуса r с центром в точке 0.

В работе [2] (см также [3]) доказана следующая

Теорема 1. *1) Если $f \in BL_1(R_+^n)$, то для любого $\alpha > 0$*

$$\mu\{x : M_B f(x) > \alpha\} \le \frac{C}{\alpha} \int_{R_+^n} |f(x)| x^\gamma dx$$

где C-константа, зависящая только от n

2) Если $f \in BL_p(R_+^n)$, $1 < p \le \infty$, то $M_B f \in BL_p(R_+^n)$ и

$$\|M_B f\|_{BL_p} \le C_p \|f\|_{BL_p},$$

где C_p – зависит только от p и размерности n.

Для локально интегрируемой функции $f : R_+^n \to R$ и для $0 \le \alpha < n + |\gamma|$ введем также дробную B- максимальную функцию

$$M_B^\alpha f(x) = \sup_{r>0} (\mu B_+(0,r))^{\frac{\alpha}{n+|\gamma|}-1} \int_{B_+(0,r)} |T^y f(x)| y^\gamma dy,$$

Непосредственно доказывается, что справедливо следующее неравенство

$$\sup_x M_B^\alpha f(x) \le B\|f\|_{BL_p}, \text{ при } \alpha = \frac{n+|\gamma|}{p}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для любого $f \in BL_p(R_+^n)$ справедлива неравенство

$$\left(\int_{R_+^n}\left(M_B^\alpha f(x)\right)^q x^\gamma dx\right)^{1/q} \le \left(\int_{R_+^n}\left|\left(f(x)\right)\right|^p x^\gamma dx\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для любого $f \in BL_p(R_+^n)$ *справедлива неравенство*

$$\int_{\{x: M_B^\alpha f(x)>s\}} x^\gamma dx \le C_{s^{-q}}\left(\int_{R_+^n}\left|\left(f(x)\right)\right|^p x^\gamma dx\right)^{1/q}.$$

Рассмотрим B-потенциала Рисса

$$R_B^\alpha f(x) = \int_{R_+^n}|y|^{\alpha-n-|\gamma|}\left(T^y f(x)\right)y^\gamma dy, \quad 0<\alpha<n+|\gamma|.$$

Будем говорить, что функция $f \in BL_1^{loc}(R_+^n)$ принадлежит пространству
$BMO_B\left(R_+^n\right)$, если

$$\|f\|_{*,B} = \sup_{r>0}\left(\mu B_+(0,r)\right)^{-1}\int_{B_+(0,r)}\left|f(y)-f_{B_+(0,r)}\right|y^\gamma dy < \infty,$$

где

$$f_{B_+(0,r)} = \left(\mu B_+(0,r)\right)^{-1}\int_{B_+(0,r)} f(y)y^\gamma dy.$$

Определим B-пространство Морри $BL_{p,\lambda}(R_+^n) = L_{p,\lambda}^\gamma(R_+^n)$.

Определение 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le n+|\gamma|$. *Будем говорить, что измеримая на* R_+^n, *четных по переменным* $x_1,\ldots,x_n$ *функция принадлежит классу* $BL_{p,\lambda}(R_+^n)$, *если существует константа* C_f *такая, что*

$$\int_{B_+(0,t)}\left|T^y f(x)\right|^p y^\gamma dy \le C_f t^\lambda$$

для любого $(x,t) \in R_+^n \times (0,\infty)$.

На множестве $BL_{p,\lambda}(R_+^n)$ *введем норму, полагая*

$$\|f\|_{BL_{p,\lambda}} = \sup_{x,t}\left(t^{-\lambda}\int_{B_+(0,t)}\left|T^y f(x)\right|^p y^\gamma dy\right)^{1/p}$$

Отметим, что из $\mu B_+(0,t) = C^{n+|\gamma|}$ вытекает, что

$$f \in BL_{p,\lambda}(R_+^n) \Leftrightarrow \left|M_B^\alpha\left(|f|^p\right)\right|(x) \le C_f, \quad \forall x \in R_+^n, \quad \alpha = n+|\gamma|-\lambda$$

Очевидно,

$$BL_{p,0}(R_+^n) = BL_p(R_+^n), \quad BL_{p,n+|\gamma|}(R_+^n) = BL_\infty(R_+^n).$$

Более того, из неравенства Гельдера имеем

$$BL_{p,\lambda}(R_+^n) \subset BL_{p,n+|\gamma|-\alpha}(R_+^n), \text{ где } \alpha = \frac{n+|\gamma|-\lambda}{p},$$

Имеет место

Теорема 4. *1) Если $f \in BL_p(R_+^n)$, то для любого $\alpha > 0$*

$$\mu(\{x : M_B f(x) > \alpha\} \cap B_+(0,r)) \le \frac{Cr^\lambda}{\alpha}\|f\|_{BL_1},$$

где C-константа, зависящая только от n, λ.

2) Если $f \in BL_p(R_+^n)$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le n+|\gamma|$, то $M_B f \in BL_{p,\lambda}(R_+^n)$ и

$$\|M_B f\|_{BL_{p,\lambda}} \le C\|f\|_{BL_{p,\lambda}},$$

где постоянная C независит от f.

Справедлива следующая обобщенная теорема Соболева для B-потенциалов Рисса.

Теорема 5. *Пусть $0 < \alpha < n+|\gamma|$, $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le n+|\gamma|$ тогда существует положительная постоянная $C_{p,\lambda}$ такая, что*

$$\|R_B^\alpha f\|_{BL_{q,\lambda}} \le C_{p,\lambda}\|f\|_{BL_{p,\lambda}}, \quad \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}$$

Если $n+|\gamma| = \alpha p$, $f \in BL_{p,\lambda}$ и интеграл $R_B^\alpha f$ почти всюду существует, то

$$\|R_B^\alpha f\|_{*,B} \le C_p\|f\|_{BL_p}, \quad \alpha = \frac{n+|\gamma|}{p}.$$

Следствие 1. *Пусть*

$0 < \alpha < n+|\gamma|$, $0 \le \lambda \le n+|\gamma|$, $1 < p < (n+|\gamma|)/\alpha$, $\nu = (n+|\gamma|)\lambda/(n-\alpha)$,

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}.$$

Тогда

$$\|R_B^\alpha f\|_{BL_{q,\nu}} \le C_{p,\lambda}\|f\|_{BL_{p,\lambda}}.$$

Замечание 1. *В случае $p \ge \dfrac{n+|\gamma|}{\alpha}$ можно построить примеры функций $f \in BL_{p,\lambda}(R_+^n)$ таких, что потенциал $R_B^\alpha f$ не определен в любой точки $x \in R_+^n$.*

В случае $\lambda = 0$ из теоремы 5 как следствие получаем теорему Соболева для B-потенциалов Рисса.

Теорема 6. *([5]) Пусть $0 < \alpha < n+|\gamma|$, $1 < p < \infty$. Тогда существует положительная постоянная C_p такая, что*

$$\|R_B^\alpha f\|_{BL_q} \le C_p\|f\|_{BL_p}, \quad \text{если } \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}.$$

Пусть B_1^* – внешность единичного полушара $B_1 = B_+(0,1)$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$\left[\widetilde{R}_B^\alpha f\right](x) = \int_{R_+^n} \left(T^y |x|^{\alpha-n-\gamma} - |y|^{\alpha-n-\gamma} \chi_{B_1^+}(y)\right) f(y) y^\gamma dy.$$

Рассуждениями, близкими к доказательству теоремы 2 устанавливается.

Теорема 7. *Пусть* $0<\alpha<n+|\gamma|$. *Тогда оператор* $\widetilde{R}_B^\alpha$ *ограниченно действует из* $BL_{1,n+|\gamma|-\alpha}(R_+^n)$ *в* $BMO_B(R_+^n)$.

Замечание 2. *В теореме 4 оператор* $\widetilde{R}_B^\alpha$ *нельзя заменить на* R_B^α *.В самом деле, взяв* $f(x)=|x|^{-\alpha} \in BL_{1,n+|\gamma|-\alpha}(R_+^n)$, $0<\alpha<n+|\gamma|$ *можно убедиться, что* $R_B^\alpha f \notin BMO_B(R_+^n)$

Определение 1. *Пусть функция* $f(x)$ *суммируема на* R_+^n *и при любом* $\tau, 0<\tau<\infty$, *симмируема в p-ой степени на* $R_+^n \setminus B_+(0,\tau)$.. *Положим*

$$\Omega_{p,\gamma}(f,\tau) = \left[\int_{R_+^n / B_\tau} |f(x)|^p x^\gamma dx\right]^{1/p}, \quad \tau>0.$$

Определение 2. *Пусть функция* $f(x)$ *суммируема на* R_+^n *и при любом* $\tau, 0<\tau<\infty$, *симмируема в p-ой степени на* $B_+(0,\tau)$.. *Положим*

$$\Omega_{p,\gamma}^*(f,\tau) = \left[\int_{B(0,\tau)} |f(x)|^p x^\gamma dx\right]^{1/p}, \quad \tau>0.$$

Очевидно, что $\Omega_{p,\gamma}(f,\tau)$ и $\Omega_{p,\gamma}^*(f,\tau)$ неотрицательны; $\Omega_{p,\gamma}(f,\tau)$ невозрастает, *а* $\Omega_{p,\gamma}^*(f,\tau)$ не убывает на $(0,\infty)$; $\Omega_{p,\gamma}(f,\tau)$ неограничено, если $f \in L_{p,\gamma}^{loc}(R_+^n) \setminus L_{p,\gamma}(R_+^n)$; $\Omega_{p,\gamma}^*(f,\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, если $f \in L_{p,\gamma}^{loc}(R_+^n)$.

Теорема 8. *Пусть f удовлетворяет условиям определения 1 и* $1<p<q<\infty, 0<\alpha<n+|\gamma|$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}$. *Тогда при сходимости интеграла*

$$\int_0^1 t^{\frac{n+|\gamma|}{p'}-1} \Omega_{p,\gamma}(f,t)dt$$

интеграл $R_B^\alpha f$, *сходится абсолютно для почти всех* $x \in R_+^n$ *и справедливо неравенство*

$$\Omega_{q,\gamma}\left(R_B^\alpha f,\tau\right) \le C\tau^{-\frac{n+|\gamma|}{p'}} \int_0^\tau t^{\frac{n+|\gamma|}{p'}-1} \Omega_{p,\gamma}(f,t)dt$$

где постоянная C не зависит от f.

Теорема 9. *Пусть f удовлетворяет условиям определении 2 и* $1<p<q<\infty, 0<\alpha<n+|\gamma|$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Тогда при сходимости интеграла

$$\int_1^\infty t^{-\frac{n+|\gamma|}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt$$

интеграл $R_B^\alpha f$ *, сходится абсолютно для почти всех* $x \in R_+^n$ *и справедливо неравенство*

$$\Omega_{q,\gamma}\left(R_B^\alpha f,\tau\right) \le C\tau^{-\frac{n+|\gamma|}{p'}}\int_\tau^\infty t^{\frac{n+|\gamma|}{p'}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt$$

где постоянная C не зависит от f.

В терминах характеристик $\Omega_{p,\gamma}(f,\tau)$,$\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)$ введем прост - ранства $B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)$, $B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n,\varphi)$, которые, как мы докажем, при $\theta = p$ совпадают с некоторыми весовыми пространствами $BL_p(R_+^n,\omega)$.

Пусть φ положительная измеримая на $(0,\infty)$ функция, Обозначим $B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)$, $\left(B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n,\varphi)\right)$, $1 \le p < \infty, 1 \le \theta \le \infty$, множество измеримых в R_+^n функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)} = \left(\int_0^\infty \left(\Omega_{p,\gamma}(f,t)\right)^\theta \psi(t)dt\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty$$

$$\|f\|_{B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)} = \sup_{t>0}\Omega_{p,\gamma}(f,t)\varphi(t), \quad \theta = \infty$$

$$\|f\|_{B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)} = \left(\int_0^\infty \left(\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)\right)^\theta \psi(t)dt\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty$$

$$\|f\|_{B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n,\varphi)} = \sup_{t>0}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)\varphi(t), \quad \theta = \infty$$

Отметим, что $B\Gamma_{p\theta}(R_+^n,\varphi)$, $\left(B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n,\varphi)\right)$ банаховы пространства.

Пространства $\Gamma_{p\theta}(X,\varphi)$, $\left(\Gamma^*_{p\theta}(X,\varphi)\right)$ введены и изучены В.С. Гулиевым [6] (см. также [7]) относительно интегрального оператора типа потенциала в случае, когда X-однородная группа в смысле Фолланда-Стейна.

Напомним, что пространство $BL_p(R_+^n,\omega)$, $1 \le p < \infty$, определяется конечностью нормы

$$\|f\|_{BL_p(R_+^n,\omega)} = \left(\int_{R_+^n}|f(x)|^p \omega(x)x^\gamma dx\right)^{1/p}$$

Теорема 10. *Пусть* $\varphi(t), \tau \in (0,\infty)$ *положительная функция, суммируемая на каждом промежутке* $(0,\tau) \subset (0,\infty)$ *и* $1 \le p < \infty$

$$\omega(\tau) = \int_0^\tau \varphi(t)dt$$

Тогда $BL_p(R_+^n,\omega(|x|)) = B\Gamma_{pp}(R_+^n,\varphi)$ *и нормы эквивалентны.*

Теорема 11. *Пусть* $\varphi(t), t \in (0,\infty)$ *положительная функция, суммируемая на каждом промежутке* $(\tau,\infty) \subset (0,\infty)$ *и* $1 \le p < \infty$

Тогда $BL_p(R_+^n, \omega(|x|)) = BL^*_{pp}(R_+^n, \varphi)$ *и нормы эквивалентны*

Теорема 12. *Пусть*

$$1 < p < q < \infty, \quad 0 < \alpha < n + |\gamma|, \ 1 \le \theta \le \theta_1 < \infty, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}.$$

Если

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \psi(\tau) \tau^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}} d\tau \right)^{\theta/\theta_1} \left(\int_0^t \varphi(\tau)^{1-\theta'} \tau^{\frac{\theta'}{p'}(\theta - p')} d\tau \right)^{\theta - 1} < \infty$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{B\Gamma_{q\theta_1}(R_+^n, \psi)} \le C \|f\|_{B\Gamma_{p\theta}(R_+^n, \varphi)}$$

с постоянной C не зависящей от функции f.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty, 0 < \alpha < n + |\gamma|, \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{n+|\gamma|}$ *и положительные функци* φ, ψ *суммируемы на каждом промежутке* $(\tau,\infty) \subset (0,\infty)$.

Если

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \psi(\tau) \tau^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_0^t \varphi(\tau)^{1-p'} \tau^{n+|\gamma| - p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty \quad ,$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{BL_q(R_+^n \omega_1(|x|))} \le C_1 \|f\|_{BL_p(R_+^n \omega(|x|))}$$

с постоянной C_1 *не зависящей от функции f, где*

$$\omega_1(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau, \qquad \omega(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$$

Теорема 13. *Пусть*

$$1 < p < q < \infty, \quad 0 < \alpha < n + |\gamma|, \ 1 \le \theta \le \theta_1 < \infty, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$$

Если

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \psi(\tau) \tau^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}} d\tau \right)^{\theta/\theta_1} \left(\int_0^t \varphi(\tau)^{1-\theta'} \tau^{\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'} - \theta'} d\tau \right)^{\theta - 1} < \infty \quad ,$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{B\Gamma^*_{q\theta_1}(R_+^n, \psi)} \le C_2 \|f\|_{B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n, \varphi)}$$

с постоянной C_2 *не зависящей от функции f.*

Следствие 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$ *и*

положительные функци φ, ψ *сумм ы на каждом промежутке* $(\tau, \infty) \subset (0, \infty)$.

Если

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \psi(\tau) \tau^{n+|\gamma|} d\tau \right)^{p/q} \left(\int_t^\infty \varphi(\tau)^{1-p'} \tau^{-\frac{(n+|\gamma|)}{q} - p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty \quad ,$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{BL_q(R_+^n, \omega_1(|x|))} \le C_1 \|f\|_{BL_p(R_+^n, \omega(|x|))}$$

с постаянной C_2 *не зависящей от функции* f, *где*

$$\omega_1(t) = \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau, \qquad \omega(t) = \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau$$

Отметим, что если монотонная функция восстанавливается через свою производную, то следствия 1 и 2 дают условия на производные функции ω и ω_1 для справедливости неравенства

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{BL_{q,\omega_1(|x|)}(R_+^n)} \le C \|f\|_{L_{p,\omega(|x|)}(R_+^n)}$$

Заметим, что в случае $1 < \theta_1 < \theta < \infty$ повторив рассуждения доказательств теорем 7 и 8 и учитывая теорему 2, получим следующие теоремы.

Теорема 14. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$ *и*

$1 \le \theta \le \theta_1 < \infty$.

Если

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_0^t \varphi(t)^{1-\theta'} t^{\frac{(n+|\gamma|)\theta'}{p'} - \theta'} dt \right)^{\theta_1 - 1} \left(\int_\tau^\infty \psi(t) t^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}} dt \right)^{\frac{\theta}{\theta - \theta_1}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \varphi(\tau)^{1-\theta'} \tau^{\frac{(n+|\gamma|)\theta'}{p'} - \theta'} d\tau \right\}^{\frac{\theta - \theta_1}{\theta\theta_1}} < \infty,$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{B\Gamma_{q\theta_1}(R_+^n, \psi)} \le C_2 \|f\|_{B\Gamma_{p\theta}(R_+^n, \varphi)}$$

с постоянной C_1 *не зависящей от функции* f.

Теорема 15. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n + |\gamma|$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$ *и*

$1 \le \theta \le \theta_1 < \infty$.

Если

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_\tau^\infty \varphi(t)^{1-\theta'} t^{\frac{(n+|\gamma|)\theta'}{p'}-\theta'} dt \right)^{\theta_1 - 1} \left(\int_0^\tau \psi(t) t^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}} dt \right)^{\frac{\theta}{\theta-\theta_1}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \varphi(\tau)^{1-\theta'} \tau^{\frac{(n+|\gamma|)\theta'}{p'}-\theta'} d\tau \right\}^{\frac{\theta-\theta_1}{\theta\theta_1}} < \infty,$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{B\Gamma^*_{q\theta_1}(R_+^n, \psi)} \le C_2 \left\| f \right\|_{B\Gamma^*_{p\theta}(R_+^n, \varphi)}$$

с постоянной C_1 *не зависящей от функции f.*

Теорема 15. *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ 0 < \alpha < n + |\gamma|,\ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n+|\gamma|}$.

Если.

$$\tau^{-\frac{n+|\gamma|}{p'}} \int_0^\tau t^{\frac{n+|\gamma|}{p'}-1} \frac{dt}{\varphi(t)} \le \frac{C}{\psi(\tau)}$$

то

$$\left\| R_B^\alpha f \right\|_{B\Gamma_{q\infty}(R_+^n, \psi)} \le C_2 \left\| f \right\|_{B\Gamma_{p\infty}(R_+^n, \varphi)}$$

с постоянной С не зависящей от τ.

Литература

[1]. Левитан Б.М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегральы Фурье.* УМН. 1951. Т.6.№2, с.102-143.

[2]. Гулиев В.С. *Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса.* Доклады РАН. 1998 т. 358, №4, с.450-451.

[3]. Гулиев В.С. *Теореа Соболева для анизотропного потенциала Рисса-Бесселя в пространствах Морри-Бесселя.* Сдано в печать Доклады РАН 1998.

[4]. Киприянов И.А. *Преоразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весеновых классов.* Тр. МИАН. 1967. Т.89.с.130-213.

[5]. Ляхов Л.Н. *Обращение B- потенциалов.* ДАН , 1991, т. 321, №3, с.466-469.

[6]. Гулиев В.С. *Интегральные операторы в пространствах функций на однородных группах и на областях* R^n. Диссю докт. физ.-мат. наук. Москва . Математический институт им. В.А.Стеклова, 1994, с.1-324.

[7]. Гулиев В.С *Интегральные операторы, функциональные пространства и вопросы аппрксимации на группе Гейзенберга.* Баку, 1997, 200 с.

Guliev V.S. SOME ASPECTS ON *B*-HARMONIC ANALYSIS

The purpose of this paper is to extend the classical results about harmonic Analyse to the context of Bessel maximal functions? Bessel fractional integrals and the Bessel singulars integrals.

Quliev V.S. B -HARMONİK ANALİZİN MÜƏYYƏN ASPEKTLƏRİ

İşdə harmonik analizin klassik nəticələri Bessel maksimal funksiyası, Bessel potensial tipli inteqralı və Bessel sinqulyar inteqralı üçün alınır.