МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

АЛИЕВ А.Б.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДИССИПАЦИЕЙ НА ГРАНИЦЕ

Пусть $\Omega \subset R^2$ ограниченная область с гладкой границей Γ, где $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \Gamma_0 \neq \varnothing, \Gamma_1 \neq \varnothing, \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$. Пусть $\{u_1(x_1,x_2,t), u_2(x_1,x_2,t)\}$ вектор перемещения в момент t в точке $\{x_1,x_2\} \in \Omega$.

Рассмотрим следующую динамическую задачу для систем теории упругости

$$\ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + g_i, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega, \tag{1}$$

$$u_i = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\Gamma_0, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}\nu_j + (-1)^{i+1}\cdot\alpha\cdot u_{3-i,\tau} + \dot{u}_i = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_i(0,x) = u_i^0(x), \quad \dot{u}_i(,x) = u_i^1(x), \quad x \in \Omega, \; i = 1,2, \tag{4}$$

где σ_{ij} - тензор напряжения, $\nu = \{\nu_1, \nu_2\}$ единичная внешняя нормаль, $\tau = \{-\nu_2, \nu_1\}$ единичный касательный вектор, точки над функциями означают производные по t, нижний индекс j- после запятой означает производную по x_j, а нижний индекс τ - производную по направлению τ.

Пусть $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1$, где σ_{ij}^0 выражает линейную часть тензора деформации в классической теории упругости, т.е.

$$\sigma_{ij}^0 = 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{u}) + \lambda\,\delta_{ij}(\varepsilon_{11}(\vec{u}) + \varepsilon_{22}(\vec{u})),$$

где λ и μ - коэффициенты Ламе, δ_{ij} - символы Кронеккера.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1^0. $0 < \alpha < \mu$;

2^0. $\sigma_{ij}^1 = a_{ijkh}\left(t, x, \int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2 dx, \int\limits_\Omega |\nabla u_2|^2 dx\right)\varepsilon_{kh}(\vec{u})$, где $a_{ijkh}(t,x,\xi) \in$
$\in C^2([0,\infty)\times\overline{\Omega}\times V_\delta)$, $V_\delta = \{\xi \in R^2, |\xi| < \delta\}$, $a_{ijkh}(t,x,\xi) = 0$, $(t,x,\xi) \in$
$\in [0,\infty)\times\Gamma_1\times\overline{V}_\delta$;

3^0. $g_i = g_{ikh}\left(t, x, \int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2 dx, \int\limits_\Omega |\nabla u_2|^2 dx,\right)\varepsilon_{kh}(\vec{u})$, где $g_{ikh}(t,x,\xi) \in C^1([0,\infty)\times\overline{\Omega}\times\overline{V}_\delta)$,

$g_{ikh}(t,x,\xi)=0$, $(t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\overline{\Omega}\times\overline{V}_\delta$;

4^0. $|a_{ijkh}(t,x,\xi)|+|a_{ijkh,j}(t,x,\xi)|+|\dot a_{ijkh}(t,x,\xi)|+|g_{ikh}(t,x,\xi)|=0(|\xi|^p)$, $\xi\to 0$, $p>1$;

5^0. Существует такая точка $(x_1^0,x_2^0)\in R^2$, что

$$\vec r\cdot\nu\le 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0,$$
$$\vec r\cdot\nu\ge c_0>0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

где $\vec r=(x_1-x_1^0, x_2-x_0^2)$.

Через $H^k_{\Gamma_0}$ обозначим подпространство функций из $W_2^k(\Omega)$ завных нулю на Γ_0. Введем обозначения: $\vec H^k_{\Gamma_0}=H^k_{\Gamma_0}\times H^k_{\Gamma_0}$, $\vec L_2=L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}=\vec H^1_{\Gamma_0}\times\vec L_2$ со скалярным произведением:

$$\langle\theta_1,\theta_2\rangle=\int_\Omega\sigma^0_{ij}(\vec u^1)\,\varepsilon_{ij}(\vec u^2)dx+\int_\Omega\vec{\mathrm v}^1\cdot\vec{\mathrm v}^2dx+\alpha R(\vec u^1,\vec u^2)$$

где $\theta_j=(\vec u^1,\vec{\mathrm v}^j)$, $\vec u^j=(u_1^j,u_2^j)$, $\vec{\mathrm v}^j=(\mathrm v_1^j,\mathrm v_2^j)$, $j=1{,}2$, $R(\vec u^1,\vec u^2)=\int_\Omega\left[u^1_{1,1}\cdot u^2_{2,2}+\right.$

$\left.+u^1_{2,2}\cdot u^2_{1,1}-u^1_{1,2}\cdot u^2_{2,1}-u^1_{2,1}\cdot u^2_{1,2}\right]dx$.

Определим также пространство $\mathcal{H}_1$ следующим образом:

$$\mathcal{H}=\left\{(\vec u,\vec{\mathrm v})\in\vec H^2_{\Gamma_0}\times\vec H^1_{\Gamma_0},\ \sigma_{ij}(\vec u)\nu_j+(-1)^{i+1}\cdot\alpha\cdot u_{3-i,\tau}+\mathrm v_i\big|_{\Gamma_1}=0,\ i=1{,}2\right\}.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор A_0 следующими равенствами:

$$D(A_0)=\mathcal{H}_1,$$
$$A_0\theta=\left(\vec{\mathrm v},\left\{\sigma^0_{ij,j}\right\}_{i=1}^2\right),\quad \theta=(\vec u,\vec{\mathrm v})\in D(A_0).$$

Всюду через $C^k([0,\infty);V)$ будем обозначать пространство k-раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в гильбертовом пространстве V.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1^0-5^0. Тогда существует $\delta_1\in(0,\delta)$ такое, что при любых $(\vec u^0,\vec u^1)\in U_{\delta_1}\subset\mathcal{H}_1$ задача (1)-(4) имеет единственное решение $\vec u(\cdot)\in C^0([0,\infty);\vec H^2_{\Gamma_0})\cap C^1([0,\infty),\vec H^1_{\Gamma_0})\cap C^2([0,\infty);\vec L_2)$.*

Сначала докажем некоторые вспомогательные леммы. При этом чтобы не загромождать записи будем предполагать, что $g_{ikh}=-a_{ijkh,j}$. В этом случае система *(1)* имеет следующий вид:

$$\ddot u_i=\sigma^0_{ij,j}(\vec u)+a_{ijkh}[\vec u]\varepsilon_{kh,j}(\vec u) \qquad (1')$$

где $a_{ijkh}[\vec u]=a_{ijkh}\left(t,x,\int_\Omega|\nabla u_1|^2dx,\int_\Omega|\nabla u_2|^2dx\right)$.

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим билинейные формы:

$$\langle\theta_1,\theta_2\rangle_{N(W)}=\langle\theta_1,\theta_2\rangle+\int_\Omega a_{ijkh}[\vec z]\varepsilon_{kh}(\vec u)\varepsilon_{ij}(\vec u)dx,$$

где $\theta_j = \left(\vec{u}^{\,j}, \vec{\mathrm{v}}^{\,j}\right)$, $j = 1{,}2$, $a_{ijkh}[\vec{z}] = a_{ijkh}\left(t, x, \int\limits_\Omega |\nabla z_1|^2 dx, \int\limits_\Omega |\nabla z_2|^2 dx\right)$, $w = (\vec{z}, \vec{y}) \in U_\delta$.

Легко показать, что при любых $w \in U_\delta$ указанные билинейные формы определяют эквивалентные скалярные произведения в пространстве $\mathcal{H}$.

Лемма 1. *Для достаточно малых $\delta > 0$ множества скалярных произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N(w)}, w \in U_\delta$ равномерно эквивалентны и удовлетворяют условию Липшица, т.е. существует $0 < \delta_1 \le \delta$ такое, что при любых $w, w_1, w_2 \in U_{\delta_1}$ и $\theta \in \mathcal{H}_1$ справедливы неравенства*

$$c_1 \|\theta\|_{\mathcal{H}} \le \|\theta\|_{N(w)} \le c_2 \|\theta\|_{\mathcal{H}},$$

$$\left| \|\theta\|^2_{N(w_2)} - \|\theta\|^2_{N(w_1)} \right| \le c\left(\|w_1\|_{\mathcal{H}}, \|w_2\|_{\mathcal{H}}\right) \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\theta\|^2_{\mathcal{H}},$$

где $c(\cdot, \cdot) \in C^2\left(R^2_+\right)$.

Доказательство. Пусть $w = (\vec{z}, \vec{y}) \in U_\delta$, $\theta = (\vec{u}, \vec{\mathrm{v}}) \in \mathcal{H}$. Тогда

$$\|\theta\|^2_{N(w)} = \int\limits_\Omega \sigma^0_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{u}) dx + \int\limits_\Omega |\vec{\mathrm{v}}|^2 dx + \alpha R(\vec{u}, \vec{u}) + \int\limits_\Omega a_{ijkh}[\vec{z}] \varepsilon_{kh}(\vec{u}) \cdot \varepsilon_{ij}(\vec{u}) dx. \qquad (5)$$

Последнюю слагаемую можем оценить следующим образом:

$$|J| \le 2 \sup_{x \in \bar{\Omega}, i, j, k, h} \left| a_{ijkh}[\vec{z}] \right| \cdot \int\limits_\Omega \left| \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \right|^2 dx \le c\left(\|w\|_{\mathcal{H}}\right) \cdot \|\vec{u}\|^2_{\tilde{H}^1_{\Gamma_0}}, \qquad (6)$$

где $c(\xi) = O\left(|\xi|^p\right)$, $\xi \to 0$, $p > 1$.

Далее $\delta_1 > 0$ выберем так, чтобы $C(\xi) \le \dfrac{1}{2}$. Тогда из *(5)*, *(6)* будет следовать, что

$$c_1 \|\theta\|_{\mathcal{H}} \le \|\theta\|_{N(w)} \le c_2 \|\theta\|_{\mathcal{H}}.$$

Пусть $w_1, w_2 \in \mathcal{H}_1$ и $\theta \in \mathcal{H}_1$. Тогда мы имеем

$$\left| \|\theta\|^2_{N(w_2)} - \|\theta\|^2_{N(w_1)} \right| \le \sup_{x \in \bar{\Omega}, i, j, k, h} \left| \frac{\partial a_{ijkh}\left[\vec{z}_1 + \eta(\vec{z}_2 - \vec{z}_1)\right]}{\partial \xi} \right| \cdot \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}} \cdot \int\limits_\Omega \left| \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \right|^2 dx.$$

Отсюда получим утверждение леммы 1.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N(w)}$ обозначим через $\mathcal{H}_{N(w)}$. В $\mathcal{H}_{N(w)}$ определим линейный оператор $A(w)$ следующими равенствами:

$$\left. \begin{array}{c} D(A(w)) = \mathcal{H}_1 \\ A(w)\theta = \left(\vec{\mathrm{v}}, \left\{\sigma^0_{ij,j} + a_{ijkh}[z] \varepsilon_{kh,j}\right\}^2_{i=1}\right) \end{array} \right\}.$$

Лемма 2. *При любых $w \in U_{\delta_1}$ оператор $A(w)$ порождает сильно непрерывную (с.н.) сжимающую полугруппу в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{N(w)}$ и тип полугруппы равен $\omega\left(\|w\|_{\mathcal{H}}\right)$, где $\omega(\xi) = O\left(|\xi|^p\right)$, $\xi \to 0$, $p > 1$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $A(w)$ диссипативен. Из определения $A(w)$ имеем:

$$\langle A(w)\theta,\theta\rangle_{N(w)}=\int_{\Omega}\sigma_{ij}^{0}(\vec{\mathrm{v}})\varepsilon_{ij}(\vec{u})dx+\alpha R(\vec{\mathrm{v}},\vec{u})+$$

$$+\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij,j}^{0}(\vec{u})+a_{ijkh}[\vec{z}]\varepsilon_{kh,j}(\vec{u})\right)\mathrm{v}_{i}dx+\int_{\Omega}a_{ijkh}[\vec{z}]\varepsilon_{kh}(\vec{\mathrm{v}})\cdot\varepsilon_{kh}(\vec{u})dx. \qquad (7)$$

Используя формулы Грина (см. [1]) второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$J=\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{0}(\vec{u})+a_{ijkh}[\vec{z}]\cdot\varepsilon_{kh}(\vec{u})\right)_{,j}\mathrm{v}_{i}dx-\int_{\Omega}\left(a_{ijkh}[\vec{z}]\right)_{,j}\varepsilon_{kh}(\vec{u})\mathrm{v}_{i}dx=$$

$$=-\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{0}(\vec{u})+a_{ijkh}[\vec{z}]\varepsilon_{kh}(\vec{u})\right)\varepsilon_{ij}(\vec{\mathrm{v}})dx+\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}^{0}(\vec{u})\nu_{j}\mathrm{v}_{i}d\Gamma-\int_{\Omega}\left(a_{ijkh}[z]\right)_{,j}\varepsilon_{kh}(\vec{u})\mathrm{v}_{i}dx.$$

Учитывая это в *(7)* получим, что

$$\langle A(w)\theta,\theta\rangle_{N(w)}=\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}^{0}(\vec{u})\nu_{j}\mathrm{v}_{i}d\Gamma-\int_{\Omega}\left(a_{ijkh}[\vec{z}]\right)_{,j}\varepsilon_{kh}(\vec{u})\mathrm{v}_{i}dx+\alpha R(\vec{\mathrm{v}},\vec{u}). \qquad (8)$$

Далее учитывая, что $\theta\in\mathcal{H}_1$ имеем:

$$\int_{\Gamma_1}\sigma_{ij}^{0}(\vec{u})\nu_{j}\mathrm{v}_{i}d\Gamma=-\int_{\Omega}|\mathrm{v}_{i}|^{2}d\Gamma+(-1)^{i+1}\alpha\int_{\Gamma_1}u_{(3-i),\tau}\mathrm{v}_{i}d\Gamma=-\int_{\Gamma_1}|\mathrm{v}_{i}|^{2}d\Gamma-\alpha R(\vec{\mathrm{v}},\vec{u}). \qquad (9)$$

Из *(8)* и *(9)* следует, что

$$\langle A(w)\theta,\theta\rangle_{N(w)}\le-\int_{\Omega}\left(a_{ijkh}[z]\right)_{,j}\varepsilon_{kh}(\vec{u})\mathrm{v}_{i}dx.$$

Оценивая подинтегральные выражения отсюда получим, что

$$\langle A(w)\theta,\theta\rangle_{N(w)}\le\omega\left(\|\vec{z}\|_{\mathcal{H}}\right)\cdot\|\theta\|_{\mathcal{H}_1}^{2},$$

где $\omega(\xi)=\sup\limits_{x\in\overline{\Omega},i,j,k,h}\left|\left(a_{ijkh}[\xi]\right)_{j}\right|$. Ясно, что $\omega(\xi)=)\left(|\xi|^{p}\right)$, $\xi\to0$, $p>1$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$A_0\theta=h,\quad\theta\in D(A_0),\quad h\in\mathcal{H}. \qquad (10)$$

Легко показать, что *(10)*- регулярная краевая задача для эллиптической системы. Тогда из общей теории эллиптических систем (см. [2], [3]) получим, что A_0 обратим и

$$\left\|A_0^{-1}h\right\|_{\mathcal{H}_1}\le c\|h\|_{\mathcal{H}}. \qquad (11)$$

С другой стороны

$$\left|a_{ijkh}[z]\varepsilon_{k,j}(\vec{u})\right|\le c\left(\|w\|_{\mathcal{H}}\right)\cdot\|\theta\|_{\mathcal{H}_1}, \qquad (12)$$

где $c(\xi)=O\left(|\xi|^{p}\right)$, $\xi\to0$, $p>1$.

Из *(11)* и *(12)* получим, что для достаточно малых δ_1, при любых $w\in U_{\delta_1}$

$$\left\|A^{-1}(w)h\right\|_{\mathcal{H}_1}\le c\|h\|_{\mathcal{H}}. \qquad (13)$$

Лемма 3. *Оператор A_0 порождает с.н. экспоненциально убывающую полугруппу, т.е. существуют такие $M\ge1$ и $\beta>0$, что*

$$\left\| e^{tA_0} \right\|_{\mathscr{H}\to\mathscr{H}} \le Me^{-\beta t}.$$

Доказательство. Данная лемма доказана в работе [4] иными методами. Здесь мы пользуемся аналогом тождества С.И.Похожаева (см. [5], [6]). С этой целью рассмотрим смешанную задачу

$$\ddot{u}_i - \sigma^0_{ij,j} = 0 \ , \qquad (14)$$

$$u_i\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left(\sigma^0_{ij}\nu_j + (-1)^{i+1}\alpha u_{3-i,\tau} + \dot{u}_i\right)\big|_{\Gamma_1} = 0 \ , \qquad (15)$$

$$u_i(0,x) = u^0_i(x), \quad \dot{u}_i(0,x) = u^1_i(x), \quad i = 1,2. \qquad (16)$$

Обе части *(14)* умножим на $\dot{u}_i + \mu\vec{r}\cdot\nabla u_i + \zeta u_i$ и полученное тождество интегрируем по области $\Omega\times[0,t]$, где $\vec{r} = \left(x_1 - x^0_1, x_1 - x^0_2\right)$.

Тогда после несложных преобразований мы имеем:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\dot{u}_i(t,x)|^2 dx + \mu\int_\Omega \dot{u}_i\cdot\vec{r}\cdot\nabla u_i dx - \frac{\mu}{2}\int_0^t\int_\Omega div\left(\vec{r}\cdot\dot{u}_i^2\right)dxds +$$

$$+\frac{\mu}{2}\int_0^t\int_\Omega |\dot{u}_i|^2 dxds + \zeta\int_\Omega \dot{u}_i\cdot u_i dx - \zeta\int_0^t\int_\Omega |\dot{u}_i|^2 dxds - \int_0^t\int_{\Gamma_1}\sigma^0_{ij}\nu_i\,\dot{u}_i drds +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \sigma^0_{ij}\dot{u}_{i,j}dxds - \mu\int_0^t\int_\Gamma \sigma^0_{ij}\nu_j\vec{r}\cdot\nabla u_i drds + \mu\int_0^t\int_\Omega \sigma^0_{ij}\cdot\left(\vec{r}\cdot\nabla u_i\right)_{,j} dxds -$$

$$-\zeta\int_0^t\int_{\Gamma_1}\sigma^0_{ij}\nu_j u_i d\Gamma ds + \zeta\int_0^t\int_\Omega \sigma^0_{ij}u_{i,j}dxds = \frac{1}{2}\int_\Omega |u^1_i(x)|^2 dx +$$

$$+\mu\int_\Omega u^1_i(x)\cdot\vec{r}\cdot\nabla u^0_i(x)dx + \zeta\int_\Omega u^1_i(x)\cdot u^0_i(x)dx.$$

Отсюда используя граничные условия *(15)* и подбирая параметры μ и ζ подходящим образом для интеграла энергии $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\dot{u}_i(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{i,j}(t,x)|^2 dx$ получим интегральное неравенство

$$E(t) + c_1\int_0^t E(s)ds \le c_2 E(0),$$

где $c_1, c_2 > 0$.

Из последнего используя [7] получим, что

$$E(t) \le cE(0)e^{-c_3 t}.$$

Этим завершается доказательства леммы 3.

Лемма 4. *Отображение* $w \to A(w)$, *действующей из* $U_{\delta_1} \subset \mathscr{H}_1$ *в* $L(\mathscr{H}_1;\mathscr{H})$ *удовлетворяет локальному условию Липшица, т.е. при любых* $w^1, w^2 \in U_{\delta_1}, \theta \in \mathscr{H}_1$

$$\left\|\left[A(w^1) - A(w^2)\right]\theta\right\|_{\mathscr{H}} \le c\left(\|w^1\|_{\mathscr{H}}, \|w^2\|_{\mathscr{H}}\right)\cdot\|w^1 - w^2\|_{\mathscr{H}}\cdot\|\theta\|_{\mathscr{H}_1} \qquad (17)$$

где $C(\xi_1,\xi_2) \in C\left(R^2_+\right)$.

Доказательство. Пусть $w^1, w^2 \in U_{\delta_1}$ и $\theta \in \mathcal{H}_1$. Тогда

$$\left\|\left[A\left(w^1\right)-A\left(w^2\right)\right]\theta\right\|_{\mathcal{H}}^2=\int_\Omega\left|\left(a_{ijkh}\left[z^1\right]-a_{ijkh}\left[z^2\right]\right)\varepsilon_{kh,j}(\vec{u})\right|^2 dx \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{i,j,k,h \\ |\xi_l| \leq \int_\Omega |\nabla z_l^1|^2 dx+\int_\Omega |\nabla z_l^2|^2 dx,\ l=1,2}} \left|a_{ijkh}\left(t, x, \xi_1, \xi_2\right)\right| \cdot \int_\Omega\left|\varepsilon_{kh,j}(\vec{u})\right|^2 dx \times$$

$$\times\left[\left|\int_\Omega\left|\nabla z_1^1\right|^2 dx-\int_\Omega\left|\nabla z_1^1\right|^2 dx\right|+\left|\int_\Omega\left|\nabla z_2^1\right|^2 dx-\int_\Omega\left|\nabla z_2^2\right|^2 dx\right|\right].$$

Из последнего следует неравенство *(17)*.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

При помощи замены $\theta_1=\vec{u}$, $\theta_2=\dot{\vec{u}}$ задача *(1)-(4)* сводится к эквивалентной задаче

$$\dot{\theta}=A(\theta)\theta, \tag{18}$$

$$\theta(0)=\theta_0, \tag{19}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $\theta=\left(\theta_1, \theta_2\right)^*$, $\theta=\left(\vec{u}_0, \vec{u}_1\right)^*$.

Пусть $w(\cdot) \in C^0\left([0, \infty), \mathcal{H}_1\right) \cap C^1\left([0, \infty), \mathcal{H}\right)$ и $\|w(t)\|_{\mathcal{H}_1}+\|\dot{w}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \delta_1$.

Рассмотрим линеаризованную задачу:

$$\dot{\theta}=A(w)\theta, \tag{20}$$

$$\theta(0)=\theta_0, \tag{21}$$

Из доказанных лемм следует, что задача *(20)*, *(21)* имеет единственное решение $\theta \in C^0\left([0, \infty), \mathcal{H}_1\right) \cap C^1\left([0, \infty), \mathcal{H}\right)$ и

$$\theta(t)=e^{tA_0}\theta_0+\int_0^t e^{(t-s)A_0} A_1(w(s))\theta(s) ds, \tag{22}$$

где $A_1(w)=A(w)-A_0$.

Используя лемму 3 получим, что

$$\|\theta(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M e^{-\beta t}\|\theta(0)\|_{\mathcal{H}}+M \cdot \int_0^t e^{-(t-s)\beta} \cdot\left\|A_1(w(s)\theta(s))\right\|_{\mathcal{H}} ds. \tag{22}$$

Подинтегральное выражение оценим сверху:

$$\left\|A_1(w(s))\theta\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sup_{i,j,k,h;t,x}\left|a_{ijkh}\left(t, x, \int_\Omega\left|\nabla z_1\right|^2 dx, \int_\Omega\left|\nabla z_2\right|^2 dx\right)\right|^2 \cdot \int_\Omega\left|\varepsilon_{kh,j}(\vec{u})\right|^2 dx \leq$$

$$\leq c^2 \cdot\left(\int_\Omega\left|\nabla z_1\right|^2 dx+\int_\Omega\left|\nabla z_2\right|^2 dx\right)^{2p} \cdot\|\theta\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Учитывая это в *(22)* мы имеем следующее

$$e^{\beta t}\|\theta(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M\|\theta(0)\|_{\mathcal{H}}+M \cdot c \cdot \int_0^t e^{\beta s}\|w(s)\|_{\mathcal{H}}^{2p} \cdot\|\theta(s)\|_{\mathcal{H}_1} ds. \tag{23}$$

Пусть $R_\lambda(w) = (\mathrm{I} + A(w))^{-1}$, $\lambda > 0$. Тогда обозначая $\vartheta_\lambda = R_\lambda(w)\theta$ из *(20)*, получим, что

$$\mathbf{v}'_\lambda = A(w)\mathbf{v}_\lambda + \dot{R}_\lambda(w)\theta .$$

Далее используя леммы 1 и 2, отсюда получим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{v}_\lambda\|^2_{N(w)}\right) \le c\left(\|w\|_{\mathscr{H}}\right) \cdot \|\dot{w}(t)\|_{\mathscr{H}} \cdot \|\dot{\mathbf{v}}_\lambda(t)\|^2_{\mathscr{H}} + \left\|\dot{R}_\lambda(w)\theta\right\|_{\mathscr{H}} \cdot \|\mathbf{v}_\lambda(t)\|_{\mathscr{H}} .$$

Интегрируя по t и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, отсюда получим, что

$\|\theta\|^2_{\mathscr{H}_1}$

$$\|\theta\|^2_{\mathscr{H}_1} \le c_0\|\theta(0)\|^2_{\mathscr{H}_1} + \int_0^t c\left(\|w(s)\|_{\mathscr{H}}\right)\left(\|\dot{w}(s)\|_{\mathscr{H}} + 1\right)\|\theta(s)\|_{\mathscr{H}_1} ds .$$

Далее, полагая $\vartheta_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}(\theta(t+\lambda) - \theta(t))$ для $\dot{\theta}(t)$, получим следующую оценку:

$$\left\|\dot{\theta}(t)\right\|^2_{\mathscr{H}} \le c_1\|\theta_0\|^2_{\mathscr{H}_1} + \int_0^t c\left(\|w\|_{\mathscr{H}}\right)\left[\|\theta\|^2_{\mathscr{H}_1} + \left\|\dot{\theta}\right\|^2_{\mathscr{H}}\right] ds . \qquad (24)$$

Вводя обозначения $\mathcal{E}_1(\theta(t)) = \|\theta(t)\|_{\mathscr{H}}$, $\mathcal{E}_2(\theta(t)) = \left\|\dot{\theta}(t)\right\|_{\mathscr{H}} + \|\theta(t)\|_{\mathscr{H}_1}$, из *(23)*, *(24)* получим, что

$$e^{\beta t}\mathcal{E}_1(\theta(t)) \le M\mathcal{E}_1(\theta(0)) + M \cdot c \cdot \int_0^t e^{\beta s}\mathcal{E}_1^{2p}(w(s))\mathcal{E}_2(\theta(s)) ds , \qquad (25)$$

$$\mathcal{E}_2(\theta(t)) \le M_1\mathcal{E}_2(\theta(0)) + M_2\int_0^t \mathcal{E}_1^{p}(w(s))\mathcal{E}_2(\theta(s)) ds . \qquad (26)$$

Теперь определим множество

$$D_\delta = \Big\{\theta : \theta \in L_\infty(0,\infty;\mathscr{H}_1),\ \dot{\theta} \in L_\infty(0,\infty;\mathscr{H}),$$
$$\sup_{t\ge 0}\mathcal{E}_2(\theta(t)) \le \delta,\ \sup_{t\ge 0} e^{\beta t}\mathcal{E}_1(\theta(t)) \le \delta\Big\} .$$

Пусть $w(\cdot) \in D_\delta$ и $\theta(0) \subset U_\varepsilon$. Тогда ε и δ мы можем подобрать так, что из *(25)*, *(26)* будет следовать: $\theta(t) \in D_\delta$.

Следовательно мы можем построить последовательность

$$\{\theta_n\} \subset D_\delta \qquad (27)$$

следующим образом:

$$\begin{cases} \theta_0(t) = \theta_0,\ \theta_n(t) = \theta_0, \\ \dot{\theta}_n(t) = A(\theta_{n-1})\theta_n(t). \end{cases}$$

Заметим, используя леммы 1, 2 и 4, как это было сделано в [6], можем доказать, что при любых $0 < T < \infty$ последовательность $\{\theta_n\}$ фундаментальна в $C([0,T];\mathscr{H})$. Используя *(27)* получим, что существует подпоследовательность $\{\theta_{n_k}\}$ со следующими свойствами:

$$\theta_{n_k} \xrightarrow{*} \theta \quad * \text{ - слабо в } \quad L_\infty(0,T;\mathcal{H}_1),$$
$$\theta_{n_k} \longrightarrow \theta \quad \text{сильно в} \quad C([0,T];\mathcal{H}),$$
$$\theta'_{n_k} \longrightarrow \theta' \quad * \text{ - слабо в } \quad L_\infty(0,T;\mathcal{H}),$$
$$e^{-\beta t}\dot{\theta}_{n_k} \xrightarrow{*} e^{\beta t}\dot{\theta} \quad * \text{- слабо в } \quad L_\infty(0,T;\mathcal{H}),$$

где $\theta \in D_\delta \cap C_{лок}([0,\infty);\mathcal{H})$. В конце доказывается, что θ- является решением задачи *(20)-(21)*.

Литература

[1]. Дюво Г., Лионс Ж.Л. *неравенства в механике и физике*. М. 1980.

[2]. Шефтель З.Г. *Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами.* Укр.мат.журн. 18, №3, 1966, с.132-136.

[3]. Grisvard P. *Elliptic problems in nonsmoth domain.* SIAM publications, Philadelphia. PA, 1989.

[4]. Lagnese J.E. *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation of the boundary.* Nonlinear analysis, theory, methods and application, vol.16, №1, 1991, p.35-54.

[5]. Похожаев С.И. *О собственных функциях уравнения* $\Delta u = \lambda f(u)$. ДАН СССР, т.165 №1, 1965, с. 36-39.

[6]. Алиев А.Б. *Смешанная задача с диссипацией на границе для квазилинейных уравнений гиперболического типа.* ДАН СССР, т.288, №6, 1986, с.1289-1292.

[7]. Datko R. *Extending a Theorem of A.M. Liapunov to Hilbert spaces.* Journal of mathematical analysis and applicatins, 32, 1970, p. 610-616.

Əliyev Ə.B.

ELASTİQİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN KVAZİXƏTTİ SİSTEMİ ÜÇÜN SƏRHƏDDƏ DİSSİPASİYALI BAŞLANĞIC VƏ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN QLOBAL HƏLL OLUNMASI

Müstəvi üzərində elastiqiyyət nəzəriyyəsinin kvazixətti sistemi üçün sərhəddə dissipasiyalı başlanğıc və sərhəd məsələsi araşdırılmışdır.

İsbat edilmişdir ki, başlanğıc verilənlər kiçik olduqda baxılan məsələsinin hamar qlobal həlli var.

Aliev A.B.

GLOBAL SOLVABILITY OF INITIAL-BOUDARY VALUE PROBLEM FOR A QUASILINEAR SYSTEM OF ELASTICITY THEORY WITH DISSIPATION ON A BOUND

An initial-boudary value problem for a quasilinear system of elasticity theory with dissipation on bound is investigated in the paper. It is proved that the mentioned problem has a smooth global solution it the initial data are small.