1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.9

**ГУСЕЙНОВ И.М.**

# ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''+q(x)y=\lambda x^m y, \quad 0<x<a\le\infty, \tag{1}$$

где $q(x)$ - непрерывная комплекснозначная функция, $m>0$, а $\lambda$ - комплексный параметр.

В настоящей заметке построены два типа операторов преобразования (о.п.) для уравнения *(1)*: о.п. сохранющей асимптотику в бесконечности и о.п., сохраняющей начальные условия в точке $x=0$.

Как известно (см. напр. [1]), подобные вопросы для уравнения *(1)* при $m=0$ полностью изучены. Оказалось, что, когда $m>0$, в отличии от случая $m=0$, ядра операторов преобразования зависят от спектрального параметра, причем эта зависимость явно описывается.

## 1. Оператор преобразования, сохраняющий начальные условия.

В этом разделе строится о.п., который переводит решение $e_0(x,\lambda)$ простого уравнения

$$-y''=\lambda^2 x^m y \tag{$1_0$}$$

при начальных данных

$$y(0)=1, \quad y'(0)=i\lambda \tag{2}$$

в решение уравнения $e(x,\lambda)$ уравнения *(1)* при тех же начальных данных.

Сначала найдем решение $e_0(x,\lambda)$. Очевидно, что функция $U_0(x,y)=e^{i\lambda y}e_0(x,\lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x>0,\, y\in R$ и является решением задачи Коши

$$\begin{cases} x^m\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}=0 \\ U_0(0,y)=e^{i\lambda y}, \quad \dfrac{\partial U_0(0,y)}{\partial x}=i\lambda e^{i\lambda y} \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид ([2], стр.35):

$$U_0(x,y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 e^{i\lambda(y+\sigma(x,0))(2t-1)}t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$

$$+i\lambda x\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_0^1 e^{i\lambda(y+\sigma(x,0))(2t-1)}t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt,$$

где

$$\sigma(x,t)=\frac{2}{m+2}\left(x^{\frac{m+2}{2}}-t^{\frac{m+2}{2}}\right),\quad \beta=\frac{m}{2(m+2)} \tag{3}$$

Следовательно, решение $e_0(x,\lambda)$ имеет вид

$$e_0(x,\lambda)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 e^{i\lambda\sigma(x,0)(2t-1)}t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt+$$

$$+i\lambda x\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\int_0^1 e^{i\lambda\sigma(x,0)(2t-1)}t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt \tag{4}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$U(x,y)=e^{i\lambda y}e(x,\lambda) \tag{5}$$

Поскольку она является решением задачи Коши

$$\begin{cases} x^m U_{yy}-U_{xx}+q(x)U=0, \\ U(0,y)=e^{i\lambda y},\quad U_x(0,y)=i\lambda e^{i\lambda y}, \end{cases}$$

то применяя метод Римана, получаем (см. [2], стр.37)

$$U(x,y)=U_0(x,y)-\int_\xi^\eta e^{i\lambda t}\int_\xi^t d\xi'\int_\eta^t\frac{(\eta'-\xi')^{1-2\beta}q(\xi')}{(t-\xi')^{1-\beta}(\eta'-t)^{1-\beta}}\vartheta(\xi',\eta';\xi,\eta)d\eta'-$$

$$-i\lambda\int_\xi^\eta e^{i\lambda t}\int_\xi^t d\xi'\int_\eta^t(\eta'-t)^{-\beta}(t-\xi')^{-\beta}q(\xi')\vartheta(\xi',\eta';\xi,\eta)d\eta', \tag{6}$$

где

$$\xi=y-\sigma(x,0),\quad \eta=y+\sigma(x,0),$$

а $\vartheta(\xi,\eta;\xi^0,\eta^0)$ - (функция Римана) решение задачи (см. [2] стр.35)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)\vartheta+\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\beta}{\eta-\xi}\right)\vartheta+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\dfrac{q(\xi)\vartheta}{(\eta-\xi)^{4p}}=0 \\ \vartheta(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} \\ \vartheta(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=\left(\dfrac{\eta_0-\xi_0}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} \end{cases} \tag{7}$$

После перемены порядка интегрирования формулу *(6)* можно написать в виде

$$U(x,y)=U_0(x,y)-$$

$$-\int\limits_{y-\sigma(x,0)}^{y+\sigma(x,0)} d\xi' \int\limits_{y+\sigma(x,0)}^{\xi'} q(\xi')\vartheta(\xi',\eta';y-\sigma(x,0),y+\sigma(x,0))U_0(\xi',\eta')d\eta'$$

Учитывая *(5)* и полагая $y=0$, в этой формуле, после несложных преобразований получаем

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int\limits_0^x \left\{ \int\limits_{-\sigma(x,t)}^{\sigma(x,t)} K(x,t,z)e^{i\lambda z}dz \right\} e_0(t,\lambda)dt \qquad (8)$$

где

$$K(x,t,z)=\frac{1}{2}t^{-\frac{m}{2}}\vartheta\big(z+\sigma(0,t),\, z-\sigma(0,t);\, -\sigma(x,0),\, \sigma(x,0)\big).$$

Тем самым доказана следующая

**Теорема 1.** *Решение* $e(x,\lambda)$ *уравнения (1) при начальных данных (2) представимо в виде (8).*

Теперь более детально изучим свойства ядра $K(x,t,z)$. В связи с этим выведем удобные для исследования интегральные уравнения, из которых могут быть найдены ядра.

Нетрудно показать, что задача *(1)-(2)* эквивалентна интегральному уравнению

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int\limits_0^x \varphi_0(x,t,\lambda)q(t)e(t,\lambda)dt,$$

где $\varphi_0(x,t,\lambda)$-решение уравнения *($1_0$)* при начальных данных $\varphi_0(x,x,\lambda)=0$, $\varphi_{0x}(x,x,\lambda)=1$.

Введем обозначения

$$K_0(x,t,z)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^{-\frac{m}{2}}\vartheta_0\big(z+\sigma(0,t),z-\sigma(0,t);-\sigma(x,0),\sigma(x,0)\big) & \text{при } |z|<\sigma(x,t)\\ 0, \quad \text{при} \quad |z|>\sigma(x,t)\end{cases}$$

где $\vartheta_0(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$- функция Римана для уравнения Эйлера-Дарбу (см. [2], стр.33).

Нам понадобится

**Лемма.** *Справедливо равенство*

$$\varphi_0(x,t,\lambda)=-\int\limits_{-\sigma(x,t)}^{\sigma(x,t)} K_0(x,t,z)e^{i\lambda z}dz \qquad (9)$$

Эта лемма доказывается непосредственно показав, что правая часть формулы *(9)* удовлетворяет уравнению *($1_0$)* и начальные данные, аналогичные решению $\varphi(x,t,\lambda)$. При этом надо использовать формулу $(|z|<\sigma(x,t))$

$$K_0(x,t,z)=\frac{\sin\beta\pi}{2\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\times$$

$$\times\int_0^1 r^{\beta-1}(1-r)^{-\beta}\left[(1-r)\left(\sigma^2(x,t)-z^2\right)+4\sigma(x,0)\sigma(0,t)\right]dr$$

Учитывая формулу *(9)*, перепишем интегральное уравнение для решения $e(x,\lambda)$ в виде

$$e(x,t)=e_0(x,\lambda)-\int_0^x\left\{\int_{-\sigma(x,t)}^{\sigma(x,t)}K_0(x,t,z)e^{i\lambda z}dz\right\}e(t,\lambda)dt$$

Подставляя здесь вместо $e(x,\lambda)$ его представление *(8)*, получаем интегральное уравнение для ядра $K(x,t,z)$:

$$K(x,t,z)=-K_0(x,t,z)q(t)-$$
$$-\int_t^x q(\xi)d\xi\int_{z-\sigma(\xi,t)}^{z+\sigma(\xi,t)}K_0(x,\xi,\eta)K(\xi,t,z-\eta)d\eta \tag{10}$$

Полагая $K(x,t,z)=-q(t)\ \widetilde{K}(x,t,z)$, приходим к следующему уравнению для $\widetilde{K}(x,t,z)$

$$\widetilde{K}(x,t,z)=K_0(x,t,z)+$$
$$+\int_t^x q(\xi)d\xi\int_{z-\sigma(\xi,t)}^{z+\sigma(\xi,t)}K_0(x,\xi,\eta)\widetilde{K}(\xi,t,z-\eta)d\eta \tag{11}$$

Пусть

$$\widetilde{K}^{(0)}(x,t,z)=K_0(x,t,z),$$
$$\widetilde{K}^{(n)}(x,t,z)=\int_t^x q(\xi)d\xi\int_{z-\sigma(\xi,t)}^{z+\sigma(\xi,t)}K_0(x,\xi,\eta)\widetilde{K}^{(n-1)}(\xi,t,z-\eta)d\eta,\ n=1,2,\ldots$$

Так как

$$\left|\widetilde{K}^{(0)}(x,t,z)\right|=\left|K_0(x,t,z)\right|\le\frac{C(2\sigma(t,0))^{2\beta}}{\left(\tau^2(x,t)-z^2\right)^{\beta}},\quad C=\frac{\sin\pi\beta}{\pi},$$
$$\tau(x,t)=\frac{2}{m+2}\left(x^{\frac{m+2}{2}}+t^{\frac{m+2}{2}}\right),$$

методом математической индукции доказывается, что

$$\left|\widetilde{K}^{(n)}(x,t,z)\right|\le\frac{C(2\sigma(t,0))^{2\beta}}{\left(\tau^2(x,t)-z^2\right)^{\beta}}\frac{\left[C_1\int_t^x s|q(s)|ds\right]^n}{n!},\quad C_1>0$$

Тем самым ряд $\widetilde{K}(x,t,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}K^{(n)}(x,t,z)$ сходится, а его сумма, являясь решением уравнения *(11)*, удовлетворяет неравенству

$$\left|\widetilde{K}(x,t,z)\right| \le \frac{C\left(2\sigma(t,0)\right)^{2\beta}}{\left(\tau^2(x,t)-z^2\right)^{\beta}} \cdot \exp\left\{C_1\int_t^x s|q(s)|ds\right\}$$

Поэтому для ядра $K(x,t,z)$ имеет оценку

$$\int_0^x dt \int_{-\sigma(x,t)}^{\sigma(x,t)} |K(x,t,z)|dz \le C_2\int_0^x t|q(t)|dt \cdot \exp\left\{C_1\int_0^x t|q(t)|dt\right\} \qquad (12)$$

где $C_1, C_2$ - некоторые положительные постоянные. Непосредственно из уравнения *(10)* следует

$$K(x,t,\sigma(x,t)) = K(x,t,-\sigma(x,t)) = \frac{1}{2}q(t)(xt)^{-\frac{m}{4}} \qquad (13)$$

Если $q(x)$ дифференцируема, то из *(10)* получим также, что $K(x,t,z)$ удовлетворяет уравнению

$$x^m K_{zz} - K_{xx} + q(x)K = 0, \quad 0 < t < x, \quad |z| < \sigma(x,t)$$

Таким образом имеет место

**Теорема 2.** *Пусть сходится интеграл*

$$\int_0^x t|q(t)|dt < +\infty$$

*Тогда при всех $\lambda \in \mathbf{C}$ решение задачи (1)-(2) представимо в виде (8), причем ядра удовлетворяют условиям (12), (13).*

## 2. Оператор преобразования, сохраняющий асимптотику в бесконечности

Рассмотрим уравнение *(1)* и предположим, что

$$\int_0^{+\infty} x|q(x)|dx < +\infty \qquad (14)$$

Обозначим через $\mathrm{E}(x,\lambda)$ решение уравнения *(1)* удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{E}(x,\lambda) - e_0(x,\lambda)\right) = 0\,, \qquad (15)$$

где $e_0(x,\lambda)$ определена формулой *(4)*. Рассуждая как и в конце п.1., доказывается

**Теорема 3.** *Если выполняется условие (14), то уравнение (1) имеет единственное решение $\mathrm{E}(x,\lambda)$ с условием (15) и это решение представимо в виде*

$$\mathrm{E}(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int_x^{+\infty}\left\{\int_{-\sigma(t,x)}^{\sigma(t,x)} A(x,t,z)e^{i\lambda z}dz\right\}e_0(t,\lambda)dt,$$

где ядро $A(x,t,z)$ удовлетворяет условию

$$\int_{x}^{+\infty} dx \int_{-\sigma(t,x)}^{\sigma(t,x)} |A(x,t,z)| dz \le C_3 \int_{x}^{\infty} t|q(t)|dt$$

($\sigma(x,t)$ - определена в *(3)*). Кроме того

$$A(x,t,\sigma(t,x)) = A(x,t,-\sigma(t,x)) = -\frac{1}{2}q(t)(xt)^{-\frac{m}{2}}.$$

### Литература

[1]. Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев, "Наук. Думка", 1977.

[2]. Смирнов М.М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск "Высш. школа", 1977.

**Hüseynov H.M.** DÖNMƏ NÖQTƏLİ İKİNCİ TƏRTİB DİFFERENSİAL TƏNLİKLƏR UÇUN ÇEVİRMƏ OPERATORLARI

İşdə dönmə nöqtəsi olan ikinci tərtib differenial tənliklər üçün həm başlanğıc şərtlərini saxlayan, həm də sonsuzluqda asimptotikanı saxlayan çevirmə operatorları qurulur və onların nüvələrinin bəzi xassələri öyrənilir.

**Huseynov H.M.** **THE TRANSFORMATION OPERATORS FOR THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE POINT ROTATION**

In the present paper the trnsformation operators, which preserve the initial conditions and an assymptotics in the infinity for the second order equation with the point rotation is constructed. Some properties of cernel of these operators is investigated.