1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.518.28

ГУСЕЙНОВ Р.В.

АНИЗОТРОПНОЕ НЕРАВЕНСТВО С НЕСТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ

В анализе большую роль играет неравенствоХарди [1]

$$\int_0^\infty \frac{y^2}{x^2}dx \le 4\int_0^\infty y'^2 dx,$$

которое имеет место для абсолютно непрерывных на $[0,\infty)$ функций , таких, что $y(0)=0$. Это неравенство имеет много обобщений и применений [2], [3].

Ранее нами также получен ряд теорем обобщающих неравенство Харди на случай анизотропных пространств С.Л.Соболева. Некоторые из них опубликованы в работе [4].

Перед изложением цели настоящей статьи нам необходимо привести главную из этих теорем, а также ввести некоторые обозначения и понятия,

Зафиксируем набор целых чисел P_i $(i=1,...,n)$, такой, что $0<P_n\le ...\le P_n$. Совокупность ветроров $(0,...0,P_i,0,...,),(i=12,.n)$ будем обозначать M. Через λ обозначим вектор $\lambda=(P_1^{-1},...,P_n^{-1})$.

Пусть N-некоторое множество целочисленных векторов $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, таких, что $(\alpha,\lambda)\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{P_i}\le 1$, $\alpha_i\ge 0,(i=1,..,n)$, $N\supset M$.

Через N' обозначим множество всех векторов $\beta=(\beta_1,...,\beta_n)$, таких, что $D^\alpha x^\beta=0$ при всех $\alpha\in N$. Здесь и далее $x^\beta=x_1^{\beta_1}...x_n^{\beta_n}$,

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n.$$

Рогом типа (σ,l) где $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n),\sigma_i>0$ $i=1,..,n,$ $l=(l_1,...,l_{n-1})$ $l_i>0$, $i=1,..,n-1$, является всякая область $\Omega\subset R^n$ такая, что

1) $\Omega\subset R_+^n=\{x=(x_1,...,x_n):x_n>0\}$,
2) если $x\in\Omega$, то $(\mu^{\sigma_1}x_1,...,\mu^{\sigma_n}x_n)\in\Omega$ при всех $\mu>0$,
3) Пересечение Ω и каждой гиперплоскости $x_n=const>0$ – огрангиченная в R^{n-1} область, удовлетворяющая слабому условию l- рога [2].

Теорема 1. *Пусть Ω еєть Рог типа (σ,l)*,

$l=(P_1,...,P_{n-1})$,

$$\sum_{\alpha\in N}\int_{\Omega}x_n^{\gamma(\alpha)}\left|D^\alpha u\right|^p dx=I(u)<+\infty,$$

$$\int_{\substack{x\in\Omega\\1<x_n<2}}\left|u\right|^p dx<\infty,$$

числа $\gamma(\alpha)$ таковы, что

$$\gamma(\alpha)\sigma_n-P\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_i=\gamma(0,...,0,P_n)\sigma_n-PP_n\sigma_n$$

при всех $\alpha\in N$.

Предпологается также, что

$$P\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i+\frac{1}{P}\right)\frac{\sigma_i}{\sigma_n}+\gamma(0,..,0,P_n)-PP_n\neq 0$$

ни при каких $\alpha\in N'$.

Существует многочлен $\mathcal{P}(x)=\sum_{\beta\in N'}C_\beta x^\beta$ такой, что

$$\sum_{(\alpha,\lambda)\leq 1}\int_{\Omega}x_n^{\gamma(\alpha)}\left(D^\alpha(u-\mathcal{P}(x)\right)^p dx\leq CI(u),$$

где C=*const* от U не зависит.

В теореме 1, а также в других теоремах работы [4] рассмотренны степенне веса.

Целью настоящей статьи является доказательство теоремы, в которой рассматриваются общие веса.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1, то при* $S(0)<0$, *где*

$$S(\beta)=P\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+\frac{1}{P}\right)\frac{\sigma_i}{\sigma_n}+\gamma(0,...,0,P_n)-PP_n\neq 0,$$

$$x^{-1}\int_{x}^{\infty}\sigma(t)t^{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}}dt<Cx^{\gamma(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}},$$

$$\int_{\Omega}\sigma(x_n)\left|u-\mathcal{P}(x)\right|^p dx<CI(u); \qquad (1)$$

а при S(0)>0

$$x^{-1}\int_{0}^{\infty}\sigma(t)t^{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}}dt<Cx^{\gamma(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}},$$

выполнено также неравенство (1).

Доказательство. По теореме 1 существует многочлен $\mathcal{P}(x)$ такой, что если $U-\mathcal{P}(x)=\vartheta(x)$, то

$$\int_{\Omega}x_n^{\gamma(0)}\left|\vartheta\right|^p dx\leq cI(u).$$

Сделаем замену переменных $x_n = e^t,\ x_i = \omega_i x_n^{\frac{\sigma_i}{\sigma_n}}, \quad i = 1,\dots,n-1$. Тогда

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma(0)t} |\vartheta|^P e^{t\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}} e^t \, d\omega dt \le cI(u)$$

или

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{S(0)t} |\vartheta|^P d\omega dt \le cI(u).$$

$G \times (-\infty, \infty)$ – цилиндр с основанием G в который переходит область Ω.

Пусть $\alpha = (0,..0,1,0,\dots,0)$. Тогда $(\alpha,\lambda) = \dfrac{1}{P_j} < 1$. Поэтому из теоремы 1 следует

$$\int_\Omega x_n^{\gamma(0,\dots,0,1,\dots,0)} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right|^P dx \le cI(u).$$

После замены переменных

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{S(0)t} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right|^P d\omega dx \le cI(u). \qquad (2)$$

Также по теореме 1

$$\int_\Omega x_n^{\gamma(0,\dots,0,1,\dots,0)} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_n}\right|^P dx \le cI(u),$$

а в новых переменых

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{S(0)t} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i}{\sigma_n} \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \omega_i}\right|^P d\omega dt \le cI(u). \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) и из неравенства треугольника получаем

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{S(0)t} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|^P d\omega dt \le \int_G \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i}{\sigma_n} \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial \omega_i}\right|^P e^{S(0)t} d\omega dt +$$

$$+ C \sum_{i=1}^{n-1} e^{S(0)t} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right| d\omega dt \le cI(u).$$

Таким образом,

$$\int_G \int_{-\infty}^{\infty} e^{S(0)t} \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|^P dt d\omega \le cI(u).$$

А теперь пусть $\theta(t) \equiv 1$ при $-N \le t \le N$, $\theta(t) \equiv 0$ при $|t| > N + \varepsilon$, $\theta(t) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(R^1)$. Обозначим $\vartheta_N(\omega,t) = \vartheta(\omega,t)\theta(t)$.

Имеем

$$\int_{\Omega}\sigma(x_n)|\vartheta_N|^P dx=\int_G\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(e^t)|\vartheta_N|^P e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)t}dtd\omega=$$

$$=\int_G\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta_N|^P\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau\right)dtd\omega.$$

Отдельно рассмотрим внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta_N|^P\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau dt=|\vartheta_N(\omega,t)|^P\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau\Bigg|_{t-\infty}^{\infty}-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau\right]|\vartheta_N|^{P-1}P\frac{d\partial|\vartheta_N|}{dt}dt \qquad (4)$$

Пусть выполнено первое условие теоремы. Тогда

$$\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau\le ce^{S(0)t}\quad \text{при } S(0)<0$$

Произведем замену $e^\tau=\xi$. Тогда

$$\int_x^{\infty}\sigma(\xi)\xi^{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}}d\xi\le cx^{S(0)}.$$

Учитывая, что первый член правой части (4) равен нулю, из (4) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta_N|^P\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}\sigma(e^\tau)e^{\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\tau}d\tau dt\le c\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta_N|^{P-1}e^{\frac{S(0)}{p'}t}\left|\frac{\partial|\vartheta_N|}{\partial t}\right|e^{\frac{S(0)}{p'}t}dt\le$$

$$\le C\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial|\vartheta_N|}{\partial t}\right|^P e^{S(0)t}dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta_N|^{(P-1)P'}e^{S(0)t}dt\right]^{\frac{1}{p'}}\le cI(u)$$

$\left(P'=\dfrac{P}{P-1}\right)$.

Из (4) получаем

$\int_{\Omega}\sigma(x_n)|\vartheta_N|^P dx\le cI(u)$ для любого N.

При $N\to\infty$ получим

$$\int_{\Omega}\sigma(x_n)|\vartheta|^P dx\le cI(u).$$

Вторая часть утверждения теоремы 2 доказывается аналогично.

Замечание. *В работах Таленти и Томазелли [5], [6] найдено условие на весовые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, необходимые и достаточные для выполнения обобщенных неравенств Харди вида*

$$\left(\int_a^b |\varphi(x) f(x)|^P dx\right)^{1/P} \le C\left(\int_a^b |\psi(x) f'(x)|^P dx\right)^{1/P} \qquad (5)$$

для функций f(x), обращающихся в нуль при x=a, либо при x=b, c=const не зависящая от f(x). Это условие заключается в выполении следующего неравенства

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_a^b |\varphi(x)|^P dt\right)^{1/P} \quad C\left(\int_a^x |\psi(x)|^{-P'} dx\right)^{1/P'} < \infty. \qquad (6)$$

При сравнении неравенства (1) и неравенства (6) получим (в случае $n=1$)

$$\int_0^\infty \sigma(x)|\vartheta(x)|^P dx \le cI(u) = c\int_0^\infty x^{\gamma(1)}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|^P dx$$

и если обозначить $[\sigma(x)]^{\frac{1}{P}} = \varphi(x), \quad a\left[x^{\gamma(1)}\right]^{1/P} = \psi(x),$ *(a=0, b=∞)*

условие (6) , будет выглядеть как

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_x^\infty \sigma(t)dt\right)^{1/P}\left(\int_0^x \left[t^{\gamma(1)}\right]^{-p'/p} dt\right)^{1/P'} < C.$$

или

$$\left(\int_x^\infty \sigma(t)dt\right)^{1/P}\left[x^{\gamma(1)\frac{P'}{P}-1}\right]^{1/P'}$$

равномерно по x.

Отсюда

$$\left(\int_x^\infty \sigma(t)dt\right)^{1/P} \le Cx^{\gamma(1)-P+1}$$

или

$$\int_x^\infty \sigma(t)dt^{1/P} < Cx^{\gamma(0)+1}$$

Литература

[1]. Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г. *Неравенства* М.: ИЛ .1948.

[2]. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука 1975.

[3]. Кондратыв В.А., Олейник О.А. *О неравенствах Харди и Корна для некоторого класса неограниченных областей и их приложениях к теории упругости.* ДАН СССР. 1990. т.312. №6. с.1299-1304.

[4]. Гусейнов Р.В. *Об анизотропных неравенствах Харди и их применениях.* – Матем. сб. 1993. Т.184. № 6 с. 33-66.

[5]. Talenti G. –Rend. Sem .Mat. Fis. Milano, 1969. V. 39. P.171-185.

[6]. Tomaselli G. Boll .Un Mat .Ital. 1969. V.21. p.622-631.

Hüseynov R.V. **QEYRİ-QÜVVƏT TİPLİ ÇƏKİ FUNKSİYALARI İLƏ ANİZOTROP BƏRABƏRSİZLİK**

Daha əvvəl müəllif tərəfindən isbat edilmiş anizotrop S. L. Sobolev fəzalarında ümumiləşmiş Hardi bərabərsizliklərinə qüvvət funküiyaları tipli çəki funksiyaları daxil olan Hardi bərabərsizliyi isbat edilmişdir. Bundan başqa isbat edilmiş teoremin hğkmü üçün bir ölçülü fəza halında Makenhaunt şərti yoxlanmışdır.

Guseinov R.A. **ANISOTROPIC INEQUALITIES WITH NONDEGREE WCIGHTS**

Degree weights vere used in generalized Hardy type inequalities in S.L. Sobolev's anisotropic spaces proved by the author earlier.

A theorem on a generalized Hardy inequality with nondegree weighs has been proved, besides, for one-dimensional spase case, Muckenhonpt condition has been verified for affirmation of this theorem.