1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.944

ДЖАБРАИЛОВ М.С.

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА БЕСОВА-НИКОЛЬСКОГО

Коэрцитивной разрешимости краевых задач посвящена достаточно много работ (см. библиографию в [3]).

Краевые задачи для уравнений с неограниченными операторными коэффициентами изучено сравнительно мало.

В данной работе исследовано коэрцетивные задачи дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в R^n.

Пусть R^n-n мерное эвклидово пространство $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ мультииндекс с неотрицательными, целыми компонентами, $|\alpha|=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $\xi \quad (\xi_1,\ldots,\xi_n)\in R^n$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$, u - абстрактная функция со значениями из банахово пространства E.

Пусть $S(R^n:E)$ класс бесконечно дифференцируемых функций u со значениями из E таких, что

$$\sup_{x\in R^n}\left(1+|x|^m\right)\|D^\alpha u\|_E<\infty,\quad \forall m>0,\quad \forall\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Обозначим через $S'(R^n:E)$ пространство линейных непрерывных отображений из $S(R^n:E)$ в E.

Пусть A позитивный оператор в E. Тогда как известно [3] A^θ, $0<\theta<\infty$ всегда определен.

Положим

$$E(A^\theta)=\left\{u:u\in D(A^\theta),\ \|u\|_{E(A^\theta)}=\|A^\theta u\|_E+\|u\|_E<\infty\right\}.$$

Определение 1. *Если для банахово пространства* E *существует симметричная функция* $\zeta(x,y)$ *на* $E\times E$ *выпуклая по каждой из переменных удовлетворяющая условиям* $\zeta(0,0)>0$, $\zeta(x,y)\le\|x+y\|_E$ *при* $\|x\|_E=\|y\|_E=1$ *то говорят, что банахово пространство* $E-\zeta$ *- выпукло. Если при этом* E *- решетка, то говорят, что* $E-\zeta$ *- выпуклая банахова решетка.*

Через $L_p(R^n:E)$ обозначим пространство сильно измеримых функций со значениями из E суммируемых со степенью p, $1\le p\le\infty$.

Через $L_{\underset{q}{*}}(0,\delta:\mathrm{E})=L_{\underset{q}{*}}(\mathrm{E})$ обозначим пространство сильно измеримых на $(0,\delta)$, $0<\delta<\infty$ функций со значениями из E с нормой

$$\|u\|_{L_{\underset{q}{*}}(\mathrm{E})}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\delta \|u\|_{\mathrm{E}}^q \dfrac{dt}{t}\right)^{1/q} & при \quad 1\le q<\infty ,\\ \sup\limits_{0<t<\delta}\|u(x)\|_{\mathrm{E}} & при \quad q=\infty .\end{cases}$$

Определение 2. *Пусть* E_0 *и* $\mathrm{E}-\zeta$ *- выпуклые банаховы решетки,* E_0 *непрерывно и плотно вложено в* E, $1<p<\infty, 1<q<\infty$, $s=(s_1,\dots,s_n)$, $s_j>0, j=1,\dots,n$. *Положим*

$$B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E}_0,\mathrm{E})=\{u:u\in S'(R^n:\mathrm{E}),$$

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E}_0,\mathrm{E})}=\left\|t^{\beta/2}F^{-1}e^{-t|\xi|^2}Fu\right\|_{L_{\underset{q}{*}}(L_p(R_n:\mathrm{E}_0))}+$$

$$+\left\|F^{-1}\sum_{k=1}^n t^{\sigma_k-s_k/2}e^{-t|\xi|^2}\left(1+\xi_k^2\right)^{\sigma_k}Fu\right\|_{L_{\underset{q}{*}}(L_p(R_n:\mathrm{E}))}<\infty ,$$

где F *и* F^{-1} *- прямые и обратные преобразование Фурье,* $\beta>0$, $\sigma_k>\dfrac{s_k}{2}$ *произвольные действительные числа,* $k=1,\dots,n$.

Нетрудно установить, что определение пространства $B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})$ не зависит $\beta>0$ и $\sigma_k>\dfrac{s_k}{2}$, $k=1,\dots,n$.

При $\mathrm{E}_0=\mathrm{E}$ пространство $B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E}_0,\mathrm{E})$ обозначим через $B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})$. Пусть $l=(l_1,\dots,l_n)$, $s=(s_1,\dots,s_n)$, $\chi_k=\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{\alpha_j}{l_j}+\dfrac{s_k}{l_k}$, $\chi=\max\limits_{1\le k\le n}\chi_k$.

Будем рассматривать в $B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})$ уравнение

$$\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{\frac{|\alpha|}{2}}D^\alpha u+A_\lambda u+\sum_{\alpha:\chi<1}A_\alpha(x)D^\alpha u=f , \qquad (1)$$

где $A_\lambda=A+\lambda J$, A, $A_\alpha(x)$, вообще говоря линейные неограниченные операторы в E, J - единичный оператор в E. $\sum\limits_{\alpha;\chi<1}$ - сумма распространена по всем α, которые обеспечивают условию $\chi<1$, a_α, λ комплексные числа.

Сперва рассмотрим уравнение

$$L_{0\lambda}u=\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|/2}a_\alpha D^\alpha u+A_\lambda u=f . \qquad (2)$$

Пусть $\mathbf{C}$ - комплексная плоскость

$$S(\varphi)=\{\lambda:\lambda\in\mathbf{C}, |\arg\lambda-\pi|<\pi-\varphi, 0<\varphi<\pi\} .$$

Определение 3. *Функция* $u \in B^{l+s}_{p,q}(R^n; E(A)_l E)$, *удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на* R^n *для заданного* $f \in B^s_{p,q}(R^n : E)$ *называется решением уравнения (1), где* $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_j > 0$, $j = (1, \dots, \dots n)$.

Условие 1. *Пусть* $\overline{D(A)} = E$ *и при* $\forall \mu \in S(\varphi)$ *имеет место оценка*

$$\left\|(A - \mu J)^{-1}\right\|_{L(E)} \le M_\varphi (1 + |\mu|)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1,* $E - \zeta$ *- выпуклая банахова решетка,* $L_\lambda(\xi) = \sum_{|\alpha : l| = 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha$ $\quad \lambda \in S(\varphi)$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *тогда для* $\forall f \in B^s_{p,q}(R^n : E)$ *существует единственное решение их уравнения (2), принадлежащее пространству* $B^{l+s}_{p,q}(R^n : E(A)_l E)$, *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{B^{l+s}_{p,q}(R^n : E(A)_l E)} \le c \|f\|_{B^s_{p,q}(R^n : E)}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $L_\lambda(\xi) \in S(\varphi)$, то оператор $A - \sum_{|\alpha : l| = 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha - \lambda$ при $\forall \xi \in R^n$ обратим. Применяя к уравнению *(2)* преобразование Фурье получим, что при $\forall f \in B^s_{p,q}(R^n : E)$

$$u = F^{-1}\left(A - \sum_{|\alpha : l| = 1} (-1)^{|\alpha|} \xi^\alpha - \lambda\right)^{-1} Ff$$

удовлетворяет уравнению *(2)*. Докажем, что $u \in B^{l+s}_{p,q}(R^n : E(A)_l E)$ и имеет место оценка *(3)*.

В силу определения пространств $B^{l+s}_{p,q}(R^n : E(A)_l E)$ достаточно показать оценку

$$\left\| t F^{-1} e^{-t|\xi|^2} \left(A - \sum_{|\alpha : l| = 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha - \lambda\right)^{-1} Ff \right\|_{L_{q}^{*}(L_p(R_n : E))} +$$

$$+ \left\| t F^{-1} e^{-t|\xi|^2} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \xi_k^2\right)^{\frac{l_k + s_k}{2} + 1} \left(A - \sum_{|\alpha : l| = 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha - \lambda\right)^{-1} Ff \right\|_{L_{q}^{*}(L_p(R_n : E))} \le$$

$$\le c \left\| t F^{-1} e^{-t|\xi|^2} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \xi_k^2\right)^{s_k/2 + 1} Ff \right\|_{L_{q}^{*}(L_p(R^n : E))}, \tag{4}$$

а для этого достаточно показать, что почти для всех $t \in (0, +\infty)$ имеет место оценка

$$\left\|F^{-1}e^{-t|\xi|^2}A\left(A-\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\xi^\alpha-\lambda\right)^{-1}Ff\right\|_{L_p(R^n:\mathrm{E})}+$$

$$+\left\|F^{-1}e^{-t|\xi|^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k^2\right)^{\frac{l_k+s_k}{2}+1}\left(A-\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\xi^\alpha-\lambda\right)^{-1}Ff\right\|_{L_p(R^n:\mathrm{E})}\le$$

$$\le c\left\|F^{-1}e^{-t|\xi|^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k\right)^{s_k/2+1}Ff\right\|_{L_p(R^n:\mathrm{E})}. \qquad (5)$$

Для этого достаточно показать, что оператор функции

$$Q_1(\xi)=A\left(A-\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\xi^\alpha-\lambda\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1}\right)^{-1}.$$

$$Q_2(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k^2\right)^{\frac{l_k+s_k}{2}+1}\left(A-\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\xi^\alpha-\lambda\right)^{-1}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1}\right]^{-1}.$$

является мультипликатором из $L_p(R^n:\mathrm{E})$ в $L_p(R^n:\mathrm{E})$.

С этой целью устанавливаются, что функции $Q_1(\xi)$ и $Q_2(\xi)$ непрерывны вне координатных гиперплоскостей вместе с выражением $\xi^m D^m Q_1(\xi)$, $\xi^m D^m Q_2(\xi)$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, $m_j=0$ или 1 и для них имеют место оценки

$$\left\|\xi_1^{m_1}\dots\xi_n^{m_n}D^mQ_1(\xi)\right\|_{L(\mathrm{E})}\le M_1,$$

$$\left\|\xi_1^{m_1}\dots\xi_n^{m_n}D^mQ_2(\xi)\right\|_{L(\mathrm{E})}\le M_2.$$

Тогда в силу теоремы о мультипликаторах [2] для почти всех $t\in(0,\infty)$ имеет место оценка *(5)*. Отсюда следует справедливость оценки 4.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие 1.* $\mathrm{E}-\zeta$ *- выпуклая банахово решетка и* $A_\alpha(x)A^{-(1-\chi-\mu)}\in L\left(B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})\right)$ *при некотором* μ, $0<\mu+\chi<1$. *Тогда при любом* $f\in B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})$ *и достаточно больших* $|\lambda|$,

$$\sum_{|\alpha:l|=1}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha\xi^\alpha+\lambda\in S(\varphi),\quad \varphi\in(\pi/2,\pi]$$

существует единственное решение u, принадлежащее пространству $B_{p,q}^{l+s}(R^n:E(A),\mathrm{E})$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{B_{p,q}^{l+s}(R^n:\mathrm{E}(A),\mathrm{E})}\le c\|f\|_{B_{p,q}^s(R^n:\mathrm{E})}. \qquad (6)$$

Доказательство. Обозначим через L_0, L_1 и L операторы, связанные уравнениями *(1)* и *(2)*:

$$L_0 = \sum_{|\alpha:l|=1} (-1)^{|\alpha|/2} a_\alpha D^\alpha + A \ ,$$

$$L_1 = \sum_{\alpha:\chi<1} A_\alpha(x) D^\alpha \ , \quad L = L_0 + L_1$$

с областью определением

$$D(L) = D(L_0) = B_{p,q}^{l+s}(R^n : \mathrm{E}(A), \mathrm{E}) \ . \qquad (7)$$

Из теоремы 1 следует, что при условиях теоремы 2, оператор $(L_0 - \lambda J)$ имеет ограниченный обратный из $B_{p,q}^{s}(R^n : \mathrm{E})$ в $B_{p,q}^{l+s}(R^n : E(A), \mathrm{E})$.

Тогда имеем

$$L - \lambda J = \left[J + L_1 (L_0 - \lambda J)^{-1}\right](L_0 - \lambda J). \qquad (8)$$

В условиях теоремы используя теоремы вложения из [5] при $\forall u \in B_{p,q}^{l+s}(R^n : \mathrm{E}(A)_l \mathrm{E})$ имеем

$$\|L_1 u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \le \sum_{\alpha:\chi<1} \|A_\alpha(x) D^\alpha u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \le$$

$$\le c \sum_{\alpha:\chi<1} \left\|A^{(1-\chi-\mu)} D^\alpha u\right\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \le c\{h\|u\|_{B_{p,q}^{l+s}(R^n:\mathrm{E}(A),\mathrm{E})} +$$

$$+ c(h)\left\|tF^{-1} e^{-t|\xi|^2} Fu\right\|_{L_{*q}(L_p(R^n:\mathrm{E}))},$$

где h - достаточно малое, $c(h)$ положительная непрерывная функция от h.

Отсюда в силу теоремы 1 при $\sum_{|\alpha:l|=1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha + \lambda \in S(\varphi)$ и при $u \in B_{p,q}^{l+s}(R^n : \mathrm{E}(A)_l \mathrm{E})$ имеем

$$\|L_1 u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \le c\{h\|(L_0 - \lambda J)u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} +$$

$$+ c(h)\left\|tF^{-1} e^{-t|\xi|^2} Fu\right\|_{L_{*q}(L_p(R^n:\mathrm{E}))} . \qquad (9)$$

Далее учитывая, что $\left[\sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^2\right)^{s_k/2+1}\right]^{-1}$ является мультипликатором Фурье доказывается, что

$$\left\|tF^{-1} e^{-t|\xi|^2} Fu\right\|_{L_{*q}(L_p(R^n:\mathrm{E}))} \le \frac{c}{|\lambda|} \|(L_0 - \lambda J)u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \ . \qquad (10)$$

Из равенства *(8)* и оценок *(9)*, *(10)* для достаточно больших $|\lambda|$ при $\sum_{|\alpha:l|} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha + \lambda \in S(\varphi)$, следует оценка

$$\left\|L_1 (L_0 - \lambda J)^{-1} u\right\| < \|u\|_{B_{p,q}^{s}(R^n:\mathrm{E})} \ . \qquad (11)$$

Поэтому для достаточно больших $|\lambda|$ имеем

$$\left\| L_1 \left(L_0 - \lambda J \right)^{-1} \right\|_{L\left(B^s_{p,q}\left(R^n;E\right)\right)} < \perp \quad . \tag{12}$$

Тогда из равенства *(8)* в силу *(12)* следует, что оператор $L - \lambda J$ имеет обратный.

Отсюда используя теорему 1 получим утверждение теоремы 2.

Выражаю искренную благодарность д.ф.-м.н. Солтанову К. за обсуждение результатов.

Литература

[1]. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М., 1975, 478с.

[2]. Гулиев В.С. *О мультипликаторах интегралов Фурье и оценки смешанных производных для банаховозначных функций.* Доклады РАН, 1995, т. 341, №1, 7-9с.

[3]. Трибель Х. *Теория интерполяции функционального пространства.* Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, 663с.

[4]. Шахмуров В.Б. *Коэрцитивные краевые задачи для вырождающихся дифференциальна операторных уравнений.* ДАН СССР, 1985, т.280, №6, с.1316-1320.

[5]. Джабраилов М.С. *О непрерывности и компактности вложений в векторнозначных пространствах Бесова.* Доклады АН России, т.358, №4, 1998, с.452-454.

Cəbrailov M.S.

VEKTORQİYMƏTLİ FUNKSİYALARIN BESOV-NİKOLSKİ TİPLİ FƏZALARINDA DİFERENSİAL-OPERATOR TƏNLİKLƏRİN KOERSİTİV HƏLLƏ MALİK OLMASI HAQQINDA

İşdə bir sinif diferensial-operator tənliklərin vektorqiymətli funksiyalardan ibarət Besov-Nikolski tipli fəzalar şkalasında koersitiv həllə malik olması isbat edilir.

Jabrailov M.S.

ON CORCIVE SOLVABILITY OF DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS IN SPACES OF VECTOR-VALUED BESOV-NIKOLSKII TYPE FUNCTIONS

A coercive solvability of a class of differential operator equations in a scale of spaces of vector-valued Besov-Nikolskii type functions is proved in the paper.