1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.977

**ИСКЕНДЕРОВ А.Д., ЯГУБОВ Г.Я.**

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами относится к одному из ведущих разделов теории оптимальных процессов и теории дифференциальных уравнений. Последние 30 лет отличаются бурным развитием теории оптимального управления для уравнений в частных производных. Развитию теории и методов решения подобных задач оптимального управления посвящено немало работ отечественных и зарубежных авторов.

Теория оптимального упрвления системами, описываемыми линейным и нелинейным уравнениями Шредингера, является составной частью теории оптимального управления с распределенными параметрами, которая играет важную роль при изучении квантовых и ядерных процессов., распространения световых пучков и других процессов современной физики и техники [1,2]. В таких задачах управлениями служат определенные физические объекты, такие, как внешние электромагнитные поля или поля какой либо другой природы, показатели преломления и поглощения нелинейной среды и . т.д., которые обычно входят в коэффициенты уравнения Шредингера [1,2]. Такие задачи оптимального управления ранее были предметом исследования работы [1]. В этой работе в основном даются постановки задач оптимального управления квнтовомеханических систем, описываемых линейным уравнением Шредингера, обсуждаются подходы к их решению и изучается управляемость этих систем.

Задачи оптимального управления квантово-механическим потенциалом связаны с обратными задачами квантовой механики. В квантовой механике эти задачи обычно изучаются в спектральной постановке теории рассеяния. Однако в работах [3,4] рассматривается задача восстановления ядерного потенциала из условия минимума энергии, то есть изучается вариационная задача для уравнения Шредингера с управлением в коэффициенте этого уравнения.

При изучении задач оптимального управления важное место занимают иследования вопросов корректности, установление необходимых условий оптимальности и разработки численных методов решения. Из выше названных работ известно, что эти вопросы теории оптимального управления системами, описываемыми линейным уравнением Шредингера сравнительно мало изучены, а задачи оптимального управления коэффициентом нелинейного уравнения Шредингера почти не исследованы в работах [2,5] и др.

В этом направлении отметим работы [6-13] и др. Целью данной работы является изложение результатов проведенных исследований в этих работах. Ниже будем рассматривать задачу оптимального управления дя уравнения Шредингера с управлениями в коэффициенте этого уравнения в более общей, чем в ранее изученных постановках.

Пусть $D$ - ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства $E_n$, $\Gamma$-граница области $D$, которая предполагается достаточно гладкой, $T>0$ - заданное число, $0\le t\le T, \Omega_t = D\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$, $S=\Gamma\times(0,T)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$- призвольная точка области $D$, $L_p^{(m)}(D)$- лебегово пространство $m$- мерных вектор-функций, суммируемых со степнью $p\ge 1, C^k([0,T],B)$ - банахово пространство, состояшее из всех определенных и $k$- раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций со значеними в банаховом пространстве $B$, пространства $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$, $p\ge 1, k,m\ge 0$, определены в [14], символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место почти для всех значений переменной величины.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(\vartheta)=\beta_0\int_\Omega f_0(x,t,\Psi(x,t),\vartheta(x,t))dxdt+$$

$$+\beta_1\int_D f_1(x,\Psi(x,T))dx+\beta_1\int_S f_2(\xi,t,\Psi(\xi,t))d\xi dt \qquad (1)$$

на множестве $V$ из некоторого банахова пространства ограниченных измеримых функций при условиях:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\sum_{j,p=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_p}\right)-a(x)\Psi-\vartheta_0\Psi-$$

$$-(a_1\vartheta_1-ia_0)|\Psi|^2\Psi=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega \qquad (2)$$

$$\Psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in D \qquad (3)$$

$$\left.\left(\sigma_1\frac{\partial\Psi}{\partial N}+\sigma_0\Psi\right)\right|_S=0 \qquad (4)$$

*где* $i=\sqrt{-1}, \beta_0,\beta_1,\beta_2,a_0,a_1,\tau_0,\tau_1,$- заданные неотрицательные числа, такие, что $\beta_0+\beta_1+\beta_2\ne 0$, $\sigma_0+\sigma_1\ne 0$, $N$-конормаль границы $\Gamma, a(x), a_{jp}(x)$, $j,p=1,2,\dots,n$- заданные ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$a_{jp}(x)=a_{pj}(x),\ j,p=1,2,\dots,n,\ \mu_0\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\le\sum_{j,p=1}^{n}a_{jp}(x)\xi_j\bar{\xi}_p\le$$

$$\leq \mu_1 \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^2, \overset{\circ}{\forall}\ x \in D, \forall\ \xi_j \in \mathbf{C},\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

$$0 < \mu_2 \leq a(x) \leq \mu_3, \overset{\circ}{\forall}\ x \in D, \tag{6}$$

$\mu_i > 0, i = \overline{0,3}$ - заданные числа, $\vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1)$, а функции $\varphi(x), f(x,t)$, $f_0(x,t,\Psi,\vartheta)$, $f_1(x,\Psi)$, $f_2(\xi,t,\Psi)$ удовлетворяют определенным условиям, о которых отметим в каждом конкретном случае.

Теперь расскажем о результатах, полученных для различных случаев задачи *(1)-(4)*.

**Случай I.** Пусть $a_0 = a_1 = 0, n$ - любое натуральное число. Предположим, что $\sigma_1 = 0, \beta_2 = 0, \vartheta = \vartheta_0$, $f_0(x,t,\Psi,\vartheta) = \alpha\left|\vartheta(x,t) - \omega(x,t)\right|^2$, $f_1(x,\Psi(x,T)) = \left|\Psi(x,T) - y(x)\right|^2$, $\omega \in L_2(D)$, а множество $V$ имеет вид:

$$V = \left\{\vartheta : \vartheta = \vartheta_0,\ \vartheta_0 \in L_2(\Omega), \left|\vartheta_0(x,t)\right| \leq b_0, \overset{\circ}{\forall}\ (x,t) \in \Omega\right\},$$

$b_0 > 0$ - заданное число, функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$\varphi \in L_2(D),\ f \in L_2(\Omega) \tag{7}$$

Кроме того, предположим, что функции $a_{jp}(x)$ $j,p = 1,2,\ldots,n$ наряду с условиями *(5)* удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_k} \in L_\infty(D),\quad j,p,k = 1,2,\ldots,n \tag{8}$$

Задачу оптимального управления о минимизации функционала *(1)* на множестве $V$ при условиях *(2)-(4)*, соответствующую к данному случаю, назовем задачей $A$. В этой задаче под решением краевой задачи *(2)-(4)* понимается обобщенное решение из пространства $C^0([0,T], L_2(D))$ для которого справедлива оценка

$$\left\|\Psi(\cdot,t)\right\|_{L_2(D)} \leq C_0\left(\left\|\varphi\right\|_{L_2(D)} + \left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{9}$$

для $\forall\ t \in [0,T]$, где $C_0 > 0$ - некоторая постоянная. Отметим, что задача $A$ подробно исследована в работе [6] и в частности доказана

**Теорема 1.** *Существует плотное подмножество $G$ пространства $L_2(\Omega)$ такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача $A$ имеет единственное решение.*

Кроме того, вводя функцию Гамильтона-Понтрягина в виде:

$$H(x,t,\vartheta_0,\Psi,\overline{\eta}) = \mathrm{Re}\left(\vartheta_0(x,t)\Psi\overline{\eta}\right) - \alpha\left(\vartheta_0(x,t) - \omega(x,t)\right) \tag{10}$$

где $\overline{\eta} = \overline{\eta}(x,t)$ является решением сопряженной задачи, соответствующей задаче $A$, доказан принцип максимума Понтрягина.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы $\vartheta_0^* \in V$ было решением задачи $A$ необходимо выполнение условия:*

$$H\left(x,t,\vartheta_0^*(x,t),\Psi^*(x,t),\overline{\eta}^*(x,t)\right) = \\ = \sup_{\vartheta_0\in[-b_0,b_0]} H\left(x,t,\vartheta_0^*,\Psi^*(x,t),\overline{\eta}^*(x,t)\right) \qquad (11)$$

*для* $\overset{\circ}{\forall}(x,t)\in\Omega$, *где* $\Psi^*(x,t)\equiv\Psi(x,t;\vartheta^*)$, $\eta^*(x,t)\equiv\xi(x,t;\vartheta^*)$.

Наряду с этими результатами в работе [6] доказана дифференцируемость по Фреше функционала и найдено выражение для его градиента. В этом случае предполагая, что функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^2(D),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega) \qquad (12)$$

а множество допустимых управлений имеет вид:

$$V\equiv\left\{\vartheta:\vartheta=\vartheta_0,\vartheta_0\in W_2^{0,1}(\Omega),\ \left|\vartheta_0(x,t)\right|\le b_0,\left|\frac{\partial\vartheta_0(x,t)}{\partial t}\right|\in b_1,\ \forall\,(x,\overset{\circ}{t})\in\Omega\right\}$$

доказано, что задача $A$ при $\alpha\ge 0$ для любого $\omega\in L_2(\Omega)$ имеет хотя бы одно решение. Аналоги этих результатов также установлены, когда $\sigma_0=0$, $\beta_2\ne 0,\ f_2(\xi,t,\Psi)=\left|\Psi(\xi,t)-y(\xi,t)\right|^2,\ y\in L_2(s)$.

**Случай 2.** Пусть $a_0=0,\vartheta_1=const,n=1,D=(0,l),l>0$-заданное число, $\sigma_1=\beta_0=\beta_2=0$, $a_1$- любое число, а функция $f_1(x,\Psi(x,T))$ определена, как и в случае 1, множество допустимых управлений имеет вид:

$$V=\left\{\vartheta=\vartheta_0,\ \vartheta_0\in L_2(D),\ \left|\vartheta_0(x)\right|\le b_0,\forall\,\overset{\circ}{x}\in D\right\},$$

а функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям *(12)*. Задачу о минимизации функционала *(1)* на множестве $V$ при условиях *(2)-(4)* в данном случае назовем задачей $B$. В этой задаче под решением краевой задачи *(2)-(4)* понимается почти всюду решение из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ для которого справедлива оценка

$$\left\|\Psi(\cdot,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}+\left\|\frac{\partial\Psi(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(D)}\le C_1\left(\left\|\varphi\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}+\left\|f\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (13)$$

$\overset{\circ}{\forall}\,t\in(0,T)$, где $C_1>0$-некоторая постоянная.

Эта задача исследована в работах[7] и доказана.

**Теорема 3.** *Задача $B$ имеет хотя бы одно решение.*

Кроме того, для решения задачи $B$ доказаны необходимые условия в виде точечного принципа максимума и найдено выражение для градиента функционала.

Эти результаты обобщены в работе [11], где множество допустимых управлений имеет вид:

$$V \equiv \left\{ \vartheta : \vartheta = (\vartheta_0, \vartheta_1),\ \vartheta_j = \vartheta_j(x),\ \vartheta_j \in L_2(D),\ \left|\vartheta_j(x)\right| \le b_j,\ j = 0,1,\ \forall\ \overset{\circ}{x} \in D \right\}$$

и управляющая функция входит также в коэффициент нелинейного слагаемого уравнения Шредингера.

**Случай 3.** Пусть $\sigma_0 = 0,\ a_1 = 0, a_0 > 0,\ \ \beta_0 = \beta_1 = 0, n \le 3,\ \ a_{jp}(x) = $ $= const > 0$, $f_2(\xi, t, \Psi) = \left|\Psi(\xi,t) - y(\xi,t)\right|, y \in L_2(s)$, а множество допустимых управлений имет вид:

$$V \equiv \Big\{ \vartheta : \vartheta = \vartheta_0,\ \vartheta_0 \in W_2^{1,1}(\Omega),\ \left|\vartheta_0(x,t)\right| \le b_0,$$

$$\left|\frac{\partial \vartheta_0(x,t)}{\partial t}\right| \le b_1,\ \left\|\frac{\partial \vartheta_0(x,t)}{\partial x}\right\|_{E_3} \le b_2,\ \overset{\circ}{\forall}\ (x,t) \in \Omega \Big\},$$

где $b_i > 0, i = \overline{0,2}$ такие, что $V \ne \varnothing$. Задачу оптимального управления, соответствующую этому случаю назовем задачей $C$.

Задача $C$ исследована в работе [9] и доказано существование хотя бы одного решения задачи и необходимые условия в виде вариационного неравенства.

Отметим, что выше мы выделим те задачи, которые существенно отличаются по постановкам. Кроме этих случаев можно выделить случаи, которые также подробно исследованы и получены результаты, которые представляют немалый интерес.

## Литература


[1]. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. *Управление квантовомеханическими процессами.* М. Наука, 1984.

[2]. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. *Принципы адаптивной оптики.* М. Наука, 1985.

[3]. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. *Классическая теория поля (новые проблемы).* М.; Л. Гостехиздат, 1951.

[4]. Джавадов А.В., Искендеров А.Д. *Исследование устойчивого состояния ядра с потенциалом Гартенхауза.* Ученые зап. Аз.ГУ, Сер. Физ.-матем. 1965, №2, с. 77-84.

[5]. Васильев Ф.П, Воронцов М.А., Литвинова О.А. *Об оптимальном управлении процессов теплового самовоздействия.* Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1979, т. 19, №4, с. 1053-1058.

[6]. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. *Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала.* ДАН СССР, 1988, т. 303, №5, с. 1044-1048.

[7]. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. *Оптимальное упрвление нелинейными квантовомеханическими системами.* Автоматика и телемехан., 1989, №12, с. 27- 38.

[8]. Искендеров А.Д., Махмудов Н.М. *Оптимальное управление квантово-механической системой с критерием качества Лионса.* Изв. АН Азерб., Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1995, т. XVI, №5-6, с. 30-35.

[9]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. *О вариационном методе решения многомерной об-*

*ратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера.* Изв. АН Азерб., Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1994, т. XV, №5-6, с. 56-61.

[10]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. *Разностный метод решения вариационной постановки одной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.* Изв. АН Азерб., Сер. физ.-техн. и матем. наук., 1995, т. XVI, №1-2, с. 46-51.

[11]. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. *Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера.* Дифференц. Уравнения, 1997, т. 33, №12.

[12]. Динь Н.Х. *Оптимальное управление квантовыми объектами.* Автоматика и телемехан., 1986, №2, с. 14-20.

[13]. Силла Н. *Численные решения задач оптимального управления квантовомеханическими системами типа Шредингера.* Канд. Дисс., Баку, 1991, 169 с.

[14]. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М. Наука, 1971.

**İskəndərov A.D., Yaqubov Q.Y.**

## KVANTOMEXANİKİ POTENSİALLA OPTİMAL İDARƏETMƏ

Qeyri xətti Şredinger tənliyi üçün kvantomexaniki potenüialla optimal idarəetmə məsələsinə baxılır və yeganəlik, varlıq, optimallıq üçün zəruri şərtlər isbat olunur.

**Iskenderov A.D., Yagubov G.Y.**

## OPTIMAL CONTROL BY QUANTOMECHANICAL POTENTIAL

Optimal control problem by quantomechanical potential for nonlinear Schrödinger equation is considered, theorems about uniqueness, existinse and necessery condition of optimality are established.