1998 ТОМ VIII(XVI)

УДК 517.946

ИСКЕНДЕРОВ Б.А., СУЛЕЙМАНОВ С.Э.

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ КОРРЕКТНОГО ПО И.Г.ПЕТРОВСКОМУ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение.

Изучение распространение волн в бесконечных областях (в море, в атмосфере, в трубе) приводит к изучению краевых задач для эллиптических уравнений в цилиндрических областях [1], [2].

Принципы излучения (принцип предельного поглощения, принцип предельной амплитуды,условия излучения) во всем пространстве или во внешности ограниченной области с гладкой границей хорошо изучены [3].

Принципы излучения для уравнения Гельмгольца в трехмерном слое или в цилиндре изучены в работах А.Г.Свешникова [4], [5].

Принципы излучения для уравнения Гельмгольца, для эллиртических уравнений высокого порядка и принцип предельной амплитуды для волнового уравнения с финитным возмущением в многомерных цилиндрических областях изучены в работах [6]- [10].

В этой работе изучено поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи для корректного по И.Г.Петровскому уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами в цилиндрической области, из которого при конечном числе условий ортогональности на правую часть уравнения следует принцип предельной амплитуды.

§1. Постнановка задачи и некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим через $R_m(y)$ m-мерное евклидово пространство с точкой $y=(y_1,\dots,y_m)$, а через $R_n(x)$ такое же пространство с точкой $x=(x_1,\dots,x_n)$. Пусть $Ц = R_n(x)\times\Omega$- цилиндрическая область в $R_n(x)\times R_m(y)$, где Ω- ограниченнная область в $R_m(y)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $Q=(0,+\infty)\times Ц$. Рассмотрим в Q следующую задачу:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+P_1\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(t,x,y)=f(x,y)e^{i\omega t}, \qquad (1)$$

$$u(0,x,y)=0 \quad \frac{\partial u(0,x,y)}{\partial t}=0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^j u(t,x,y)}{\partial n^j}\right|_{[0,\infty)\times\partial Ц} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,N-1, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y_m}\right), \quad P(is,iz) = P_0(is) + P_1(iz)$$

отрицательно-определенный эллиптический многочлен степени однородности $2N$, причем $P_\nu(is) = -|s|^{2N}$, $(\nu = 0,1)$ $P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – дифференциальный оператор порядка $\gamma \le 2N-1$ с финитными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, n- внешняя нормаль к боковой поверхности цилиндра $Ц$, $f(x,y) \in C_0^\infty(Ц)$, $\omega \ne 0$ – вещественное число.

Определение. *Под решением задачи (1)-(3) в Q будем понимать функцию $u(t,x,y)$, при каждом t принадлежащую пространству $H_0^{2N}(Ц)$ и удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) по t в обычном смысле, а по x,y в смысле L_2.*

Здесь $H^s(\Omega)$ означает пространство Соболева-Слобовецкого. Считая $u(t,x,y)$ по t как обобщенную функцию над пространством D_+ ([11], с.113) и совершая в (1)-(3) обобщенное преобразование Лапласа по t, получаем следующую задачу:

$$\left[P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right) - k^2\right]\tilde{u}(k,x,y) = \frac{f(x,y)}{k - i\omega}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^j \tilde{u}(k,x,y)}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial Ц} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,N-1, \tag{5}$$

где $\operatorname{Re} k > 0$, $\tilde{u}(k,x,y) = \mathcal{L}u(t,x,y)$, $\mathcal{L}$ - обобщенное преобразование Лапласа по t.

Рассмотрим дифференциальное выражение $L_1 = -P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ с областью определения

$$D(L_1) = \left\{\vartheta : \vartheta(y) \in H^{2N}(\Omega), \left.\frac{\partial^j \vartheta(y)}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,N-1\right\}$$

Дифференциальное выражение L_1 с областью определения $D(L_1)$ порождает положительно-определенный самосопряженный оператор $\tilde{L}$ в $L_2(\Omega)$. Из теоремы 3 в ([12], с. 195) и сепарабельности пространства $L_2(\Omega)$ следует, что спектр оператора $\tilde{L}$ дискретен и для его собственных значений λ_μ имеет место

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 <,\ldots,\le \lambda_\mu \le \ldots, \lim_{\mu\to\infty} \lambda_\mu = +\infty.$$

собственные функции $\varphi_\mu(y)$ оператора $\widetilde{L}$, соответсвующие собственным значениям λ_μ, образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. [10] *Для убывающей на бесконечности функции Грина задачи (4)-(5) с комплексным параметром* k^2 *при* $P_2\left(x, y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ *имеет место представление*

$$G(k,x,y,z) = \frac{i}{4N(2\pi)^{n/2}}|x|^{1-n/2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(y)\varphi_\mu(z)\times \times\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1}H_{n/2-1}^{(1)}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right) \tag{6}$$

где

$\eta_{\nu\mu} = |\zeta_\mu|^{1/2N}\exp\left[i\left(\dfrac{1}{2N}\arg\zeta_\mu + \dfrac{\pi}{N}\left(\dfrac{1}{2}+\nu\right)\right)\right]$, $\zeta_\mu = k^2 + \lambda_\mu$, $H_{n/2-1}^{(1)}(z)$ – *функция Ханкеля первого рода.*

§2. Приведение задачи (4)-(5) к эквивалентному операторному уравнению.

Можно показать [13], что задача (4)-(5) в $L_2(Ц)$ эквивалентна операторному уравнению

$$W(k,x,y) + P(k)W(k,x,y) = \frac{f(x,y)}{k - i\omega}, \tag{7}$$

с вполне непрерывным оператором $P(k)$, аналитически зависящим от комплексного параметра $k^2(\operatorname{Re}k > 0)$ и действующим в пространстве $L_2(Ц)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Формула*

$$\vartheta(k,x,y) = T(k)W(k,x,y) = \int_Ц G(k,x,\xi,y,z)W(k,\xi,z)dЦ \tag{8}$$

при каждом $k(\operatorname{Re}k > 0)$ *устаналивает взаимно однозначное соответствие между принадлежащим* $H_0^{2N}(Ц)$ *решениями задачи (4)-(5) и принадлежащими* $L_2(Ц)$ *решениями уравнения (7) и в любом компакте из полуплоскости* $\operatorname{Re}k > 0$ *или при всех вещественных k имеет место оценка*

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(Ц)} \le C(n,N)\left(\inf_\mu|k^2+\lambda_\mu|\right)^{-1}\|W(k,x,y)\|_{L_2(R_n)}, \tag{9}$$

где C(n,N)- константа, зависящая от n и N.

Доказательство. Пусть $\vartheta(k,x,y)$ определена формулой (8), где $W(k,x,y)$ есть решение уравнения (7), принадлежащие $L_2(Ц)$. Подставляя это выражение $\vartheta(k,x,y)$ в уравнение (4), получаем, что оно условий (5) Удовлетворяется. Удовлетворение граничных.
следует из того, что этим условиям удовлетворяет функция Грина $G(k,x,y,z)$ задачи (4)-(5), с $P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$.

Пусть теперь $u(k,x,y)$ является решением задачи (4)-(5), принадлежащее $H_0^{2N}(Ц)$ (при правой части *f(x,y))*. Рассмотрим функцию

$$W(k,x,y)=f(x,y)+P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(k,x,y). \tag{10}$$

Подставляя эту функцию в (4) получим, что уравнение (7) удовлетворяется, где

$$P(k)W(k,x,y)=P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right)T(k)W(k,x,y) \tag{11}$$

Однозначность очевидна. В силу равномерной сходимости ряда в выражении функции функции Грина $G(k,x,y,z)$ при $|x-\xi|\geq\varepsilon>0$ и равенства Парсеваля из (8) имеем

$$\int_\Omega|\vartheta(k,x,y)|^2dy=$$

$$=C(n,N)\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\int_{R_n}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1}|x-\xi|^{1-n/2}H_{n/2-1}^{(1)}\left(|x-\xi|\eta\right)W_\mu(k,\xi)d\xi\right|^2, \tag{12}$$

где

$$W_\mu(k,\xi)=\int_\Omega W(k,\xi,z)\varphi_\mu(z)dz.$$

Интегрируя почленно, что законно в пространстве $L_2(R_n)$, получим

$$\int_\Omega|\vartheta(k,x,y)|^2dЦ=$$

$$=C(n,N)\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{R_n}\left|\int_{R_n}|x-\xi|^{1-n/2}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1}H_{n/2-1}^{(1)}\left(|x-\xi|\eta_{\nu\mu}\right)W_\mu(k,\xi)d\xi\right|^2dx \tag{13}$$

Применяя неравенства Хаусдорфа-Юнга ([14], с.57), получим

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(Ц)}^2\leq C(n,N)\sum_{\mu=1}^{\infty}\|W_\mu(k,\xi)\|_{L_2(R_n)}^2J_\mu^2(k),$$

где

$$J_\mu^2(k)=\int_{R_n}|x|^{1-n/2}\left|\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1}H_{n/2-1}^{(1)}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right)\right|dx \tag{14}$$

Можно показать, что для любого компакта из полуплоскости $\operatorname{Re} k > 0$ и достаточно большом λ_μ или вещественном k^2 существует $\varepsilon > 0$, для которого

$$0 < \varepsilon \le \arg \eta_{\nu\mu} \le \pi - \varepsilon, \quad \nu = 0,1,\dots,N-1; \quad \mu = 1,2,\dots.$$

Перейдя в (14) к полярным координатам и сделав замену

$$\tau = |x| \left| k^2 + \lambda_\mu \right|^{1/2N},$$

получим

$$J_\mu(k) \le C(n,N) \left| k^2 + \lambda_\mu \right|^{-1} \int_0^\infty \tau^{n/2} e^{-|\tau|\sin\varepsilon} d\tau = C(n,N) \left| k^2 + \lambda_\mu \right|^{-1} \qquad (15)$$

Подставляя эту оценку в (14), получим

$$\left\| \vartheta(k,x,y) \right\|^2_{L_2(Ц)} \le C(n,N) \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| k^2 + \lambda_\mu \right|^{-2} \left\| W_\mu(k,\xi) \right\|^2_{L_2(Ц)} \le$$

$$\le C(n,N) \left(\inf_\mu \left| k^2 + \lambda_\mu \right|^{-2} \right) \left\| W_\mu(k,\xi,z) \right\|^2_{L_2(Ц)}.$$

Отсюда следует оценка (9). Теорема доказана.

Теорема 3. *Оператор $P(k)$ при $\operatorname{Re} k > 0$ аналитически зависит от параметра к. При каждом таком к он вполне непрерывен и $\|P(k)\| < 1$ при больших положительных к.*

Доказательство. По условию

$$P_2\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{\chi=0}^{2N-1} a_\chi(x,y) \frac{\partial^\chi}{\partial x^\chi},$$

где $a_\chi(x,y)$ – финитные бесконечно дифференцируемые в Ц функции. В силу равномерной сходимости ряда в (6)

$$P(k)W(k,x,y) = \sum_{\chi=0}^{2N-1} a_\chi(x,y) \int_Ц \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(y) \varphi_\mu(z) \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1} \times$$

$$\times \frac{\partial^\chi}{\partial x^\chi} \left[|x-\xi|^{1-n/2} H^{(1)}_{n/2-1}\left(|x-\xi| \eta_{\nu\mu} \right) \right] W(k,\xi,z) d\xi dz.$$

Как в теореме 2,

$$P(k)W(k,x,y) = \sum_{\chi=0}^{2N-1} a_\chi(x,y) B_\chi(x,y),$$

где

$$B_{\mu\chi}\left(|x-\xi| \right) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1} \frac{\partial^\chi}{\partial x^\chi} \left[|x-\xi|^{1-n/2} H^{(1)}_{n/2-1}\left(|x-\xi| \eta_{\nu\mu} \right) \right] d\xi,$$

а

$$B_\chi(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(y) \int_{R_n} B_{\mu\chi}\left(|x-\xi| \right) W_\mu(k,\xi) d\xi \qquad (16)$$

Применяя неравенство Гельдера к (16), получим

$$\int_{Ц}\left|P(k)W(k,x,y)\right|^2 dЦ \le \int_{Ц}\sum_{\chi=0}^{2N-1}\left|a_\chi(x,y)\right|^2 dЦ \int_{Ц}\sum_{\chi=0}^{2N-1}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ = \\ = C\int_{Ц}\sum_{\chi=0}^{2N-1}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ. \tag{17}$$

Оценим теперь $\int_{Ц}\sum_{\chi=0}^{2N-1}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ$.

По равенству Парсеваля

$$\int_{Ц}\sum_{\chi=0}^{2N-1}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ = \int_{R_n}dx\int_{\Omega}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dy = \int_{R_n}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|W_\mu(k,\xi)B_{\mu\chi}(|x-\xi|)d\xi\right|^2 dx =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{R_n}\left|\int_{R_n} W_\mu(k,\xi)B_{\mu\chi}(|x-\xi|)d\xi\right|^2 dx.$$

Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга ([14], с.57), получим

$$\int_{Ц}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ \le \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\|W_\mu(k,\xi)\right\|^2_{L_2(R_n)}\left(\int_{R_n}\left|B_{\mu\chi}(x)\right|dx\right)^2 \tag{18}$$

В сферических координатах

$$\frac{\partial^\chi}{\partial x_j^\chi} = \sum_{l=1}^{\chi}\theta_l(x_j)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^l,$$

где $\theta_l(x_j)$ – однородная функция порядка однородности l. Испльзуя формулу дифференцирования Ханкеловых функций и переходя к полярным координатам, получим

$$\int_{R_n}\left|B_{\mu\chi}(|x|)\right|dx = \omega_{n-1}\int_0^\infty |x|^{n/2-l}\sum_{l=1}^{\chi}(-1)^l\theta_l(x_j)\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n/2-2N+1}H^{(1)}_{n/2-1+l}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right)dx$$

ω_{n-1} – поверхность единичной сферы в R_{n-1}.

Оценивая последнюю сумму, получим

$$\int_{R_n}\left|B_{\mu\chi}(|x|)\right|dx \le C(n,N)\left|k^2+\lambda_\mu\right|^{-1+1/2N} \tag{19}$$

Из (18) и(19) следует, что

$$\int_{Ц}\left|B_\chi(x,y)\right|^2 dЦ \le C(n,N)\left(\inf_\mu\left|k^2+\lambda_\mu\right|\right)^{-2+1/N}\left\|W(k,\xi,z)\right\|^2_{L_2(R_n)} \tag{20}$$

Из (17) и (20) получаем

$$\left\|P(k)W(k,x,y)\right\|_{L_2(Ц)} \le C(n,N)\left(\inf_\mu\left|k^2+\lambda_\mu\right|\right)^{-1+1/2N}\left\|W(k,\xi,z)\right\|_{L_2(R_n)} \tag{21}$$

Так как $N \geq 1$, то из этой оценки следует, что $\|P(k)\| < 1$ при больших положительных к Аналитичность оператора $P(k)$ следует из аналитичности функции Грина $G(k,x,y,z)$ и из равеномерной сходимости интеграла в формуле (8) в каждом компакте полуплоскости $\mathrm{Re}\,k > 0$.

По определению нормы в пространстве $H_0^{2N}(Ц)$

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^{2N}(Ц)} = \left\{ \int_Ц \left| \left[P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - 1 \right] \vartheta(k,x,y) \right|^2 dЦ \right\}^{1/2}$$

Применяя неравенство Минковского и учитывая (8), получим

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^{2N}(Ц)} = \left(\int_Ц \left| \left[P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - k^2 \right] \vartheta(k,x,y) \right|^2 dЦ \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_Ц \left| (k^2 - 1)\vartheta(k,x,y) \right|^2 dЦ \right)^{1/2} \leq \left(\int_Ц \left| W(k,\xi,z) \right|^2 dЦ \right)^{1/2} +$$

$$+ \left| k^2 - 1 \right| \left(\int_Ц \left| \vartheta(k,\xi,z) \right|^2 dЦ \right)^{1/2}.$$

В силу неравенства (9) имеем

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^{2N}(Ц)} \leq \left(1 + C(n,N) \left(\inf \left| k^2 - \lambda_\mu \right| \right)^{-1/2} \right) \|W(k,\xi,z)\|_{L_2(Ц)} \qquad (22)$$

Используя оценку (22), в каждом компакте полуплоскости $\mathrm{Re}\,k > 0$ имеем

$$\|P(k)W(k,\xi,z)\|_{H_0^{2N}(Ц)} = \left\| P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right) T(k) W(k,\xi,z) \right\|_{H_0^{2N}(Ц)} \leq$$

$$\leq C \|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^{2N-1}(Ц)} \leq C \|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^{2N}(Ц)} C(k,n,N) \|W(k,\xi,z)\|_{L_2(Ц)}$$

Отсюда следует, что оператор *P(k)* при $\mathrm{Re}\,k > 0$ ограниченно действует из пространства $L_2(Ц)$ в $H_0^{2N-1}(Ц)$. Поэтому он как оператор из пространства $L_2(Ц)$ в $L_2(Ц)$ вполне непрерывен. Теорема доказана.

§ 3. Поведение при $t \to +\infty$ решения нестационарной задачи (1)-(3).

Так как функция Грина задачи (4)-(5) при $P_2\left(x,y,\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ на минимой оси имеет счетное число особых точек $k_l = \pm i\lambda_l^{1/2}$, то устроим на плоскости к разрезы $\left(-\infty + i\lambda_l^{1/2}, i\lambda_l^{1/2}\right)$ Функция Грина *G(k,x,y,z)* допускает аналитическое продолжение в левую полуплоскость $\mathrm{Re}\,k > 0$. Точно так же, как в теореме 2,3, можно показать, что в области $\mathrm{Re}\,k > -\delta$ при достаточно очно больших $|k|$, для которых $0 < \varepsilon \le \arg\eta_{\nu\mu} \le \pi - \varepsilon$, оператор $I+P(k)$ ограниченной обратный , где I-единенчный оператор. Поэтому в силу аналитической теоремы Фредгольма ([15], с.224) резольвента $R(k) = (I + P(k))^{-1}$ в области $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ является оператором, конечно-мероморфно зависящим от параметра κ. Так как полюсов в этой области конечное число, то прямую $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ можно выбирать так, чтобы на ней резольвента $R(k)$ не имела полюсов.

Через $L_{2,\psi}(Ц)$ будем обозначать пространство функций $F(x,y)$, для которых $\psi(x)F(x,y) \in L_2(Ц)$, где $\psi(x) = e^{-|x|}$.

Лемма. *Для решения краевой задачи (4)-(5) при* $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ *имеет место оценка:*

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_{2,\psi}(Ц)} \le C(n,N)\inf_{\mu}\left|k^2 + \lambda_\mu\right|^{-1/2+1/8N}\|W(k,\xi,z)\|_{L_{2,}(Ц)} \qquad (23)$$

Доказательство. Так как при $\mathrm{Re}\,k = \delta$ резольвента $R(k)$ не имеет полюсов, то

$$\|W(k,x,y)\|_{L_2(Ц)} \le \frac{C}{|k - i\omega|}\|f(x,y)\|_{L_2(Ц)}.$$

Учитывая аналитическое продолжение

$$\overline{T}(k)W = T(-k)$$

функции Грина в левую полуплоскость и изменение $\arg\eta_{\nu\mu}$ на линии $\mathrm{Re}\,k = -\delta$, получим, что функция $H^{(1)}_{n/2}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right)$ при $|x| \ge \varepsilon > 0$ на этой линии ограничена. Поэтому, полагая вместо $W_\mu(k,\xi)$ в (12) $e^{-|\xi|}W_\mu(k,\xi)$, получим

$$\int_{R_n} dx \int_{\Omega} |\vartheta(k,x,y)|^2 e^{-2|x|} dx =$$

$$= \int_{R_n} dx \left| \int_{R_n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \tau^{1-n/2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu} H^{(1)}_{n/2-1}\left(\tau\eta_{\nu\mu}\right) \times e^{-|\tau|} W_\mu(k, x-\tau) d\tau \right|^2$$

Далее поступая так же, как в доказательстве теоремы 2, получим

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_{2,\psi}(Ц)} \le C(n,N)\left(\inf_{\mu}\left|k^2 + \lambda_\mu\right|^{-1/2+1/8N}\right)\|W(k,\xi,z)\|_{L_{2,\psi}(Ц)},$$

где $\mathrm{Re}\,k = -d$. Лемма доказана.

Пусть теперь S_α $(\alpha = 1,2,\ldots,\beta)$ полюсы резольвенты $R(k)$ порядка q_α, расположеннные в области $\mathrm{Re}\,k = -\delta$, и первые β_0 из них расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\,k \ge 0$. Известно, что для $R(k)$ имеет место разложение ([15],с.224)

$$R(k) = \sum_{\alpha=1}^{\beta}\sum_{\tau=1}^{q_\alpha}(k - S_\alpha)^{-\tau} D_{\alpha\tau} + D(k),$$

где $D_{\alpha\tau}$ – конечномерные операторы , а $D(k)$- регулярная оператор-функция в $L_2(Ц)$.

Теорема 4. *Пусть f(x,y) и коэффициенты оператора* $P_2\left(x, y, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ финитные бесконечно-дифференцируемые функции, $i\omega \neq S_\alpha$, $\pm\lambda_\mu^{1/2}$. Тогда при $t \to +\infty$ для решения смешанной задачи (1)-(3) имеет место асимптотическое разложение

$$u(t,x,y) = e^{i\omega t}\vartheta(i\omega,x,y) + \sum_{\alpha=1}^{\beta} \underset{k=S_\alpha}{Выч}\, e^{kt}\, \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega} + Q(t,x,y),$$

где $\vartheta(i\omega,x,y)$ – решение задачи (4)-(5) при $k = i\omega$ с правой частью *f(x,y)*, выделенное принципом предельного поглощения, и

$$\left\|Q(t,x,y)\right\|_{L_{2,\gamma}(Ц)} = O\left(t^{-n/2N}\right) \qquad (24)$$

Если *f(x,y)* удовлетворяет также конечному числу условий ортогональности, тогда для задачи (1)-(3) имеет место принцип предельной амплитуты, т.е. при $t \to +\infty$

$$u(t,x,y) = e^{i\omega t}\vartheta(i\omega,xy) + Q(t,x,y),$$

где для *Q(t,x,y)* имеет место оценка (24).

Если точка $i\omega$ совпадает с одним из полюсов резольвенты *R(p)*, например $i\omega = S_1$, то тогда решение задачи (1)-(3) при $t \to +\infty$ растет со скоростью t^{q_1-1}.

За не имением места доказательство теоремы 4 не приводим.

Литература

[1]. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах.* Москва, Наука, 1973, 341 с.

[2]. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред.* Москва, Наука 1989. 412 с.

[3]. Вайнберг Б.Р. *Асимптотические методы в уравнениях математической физики.* Из-во МГУ, 1982, 293 с.

[4]. Свешников А.Г. *Принцип излучения* . ДАН СССР, 1950, 73, №5, с.917-920.

[5]. Свешников А.Г. *Принцип предельного поглощения для волнодов.* ДАН СССР, 1951, 80, № 3, с. 345-347.

[6]. Искендеров Б.А., Аббасов З.Г., Эйвазов Э.Х. *Принципы излучения для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области.* ДАН Азерб . ССР, 1980, т.36, №4. с.8-11.

[7]. Искендеров Б.А., Эйвазов Э.Х., Эфендиева А.Н. *Принципы излучения для эллиптического уравнения высокого порядка в цилиндрической области.* Дифференциальные уравнения, 1987, т.23, № 10, с. 1804-1807.

[8]. Iskenderov B.A. *Principles of radiation for elliptic eqution in the cylindrical domain.* Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai. Szeged, Hungary, 1988, p. 249-261.

[9]. Iskenderov B.A. *The behavior of the solution of initial-bondary value problem for the wave equation with finite perturbation as* $t \to +\infty$. The 2-nd Turkis-Azerbaijan mathematics simposium, 8-14 September, 1992 Baku, p.45-46.

[10]. Искендеров Б.А. *Принципы излучения для эллиптических уравнений высокого порядка в цилиндрической области.* Журнал вычислительной математики и

математической физики. 1996, т.36, №1, с.73-91.
[11]. Шварц Л. *Математические методы для физических наук.* Мир, 1965.
[12].Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* Москва, Наука, 1957, 476 с.
[13].Вайнберг Б.Р. *Поведение решения задачи Коши для гиперболического уравнения при* $t \to +\infty$.Математический сборник. 1969, т. 78(120), №4, с.542-578.
[14].Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* Москва , Мир, 1977, 504 с.
[15]. Рид М.. Саймон Б. *Функциональный анализ.* т.1, Мир, 1977, 357 с.

İskəndərov B.A., Suleymanov S.E

İ.G.PETROVSKİYƏ GÖRƏ KORREKT YÜKSƏK TƏRTİBLİ DƏYİŞƏN ƏMSALLI TƏNLİKLƏR ÜÇÜN LİMİT AMPLİTUDU PRİNSİPİ

Çoxölçülü silindrdə yüksək tərtibli Petrovskiyə görə korrekt tənlik üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin $t \to +\infty$ olduqda ayrılışı alınmışdır. Tənliyin sağ tərəfi sonlu sayda ortoqonallıq şərtini ödədikdə limit amplitudu prinsipi isbat edilmişdir.

Iskendorov, B.A., Suleymanov S.E.

THE PRINCIPLE OF LIMITING AMPLITUDE FOR THE CORRECT BY PETROVSKY EQUATION HIGHER ORDER WITH VARIABLE COEFFICIENTS

The behavior of the solution of initial boundary value problem for the correct by Petrovsky equation higer order with variable coefficients is studied at $t \to +\infty$. From obtayned result is follow that the principle of limiting amplitude take place at finit conditions of ortogonality on right side of equation.