УДК 517.948

ИСКЕНДЕРОВ Н.Ш.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

В данной работе в случае $\xi_1 > 0 > \xi_2 > \xi_3$ изучены прямая и обратная задачи рассеяния на полуоси для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{3}c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x), \quad k=1,2,3\ , \tag{1}$$

где $c_{kj}(x)\,(k,j=1,2,3)$- измеримые комплекснозначные функции, $c_{kk}(x)=0$ $(k,j=1,2,3)$ и удовлетворяют условию

$$|c_{kj}(x)|\le c\cdot e^{-\varepsilon x} \quad (c>0,\ \varepsilon>0). \tag{2}$$

1. Задача рассеяния.

Задача рассеяния на полуоси состоит в нахождении решения системы *(1)* по заданным асимптотикам и граничным условиям при $x=0$.

Для системы *(1)* на полуоси рассмотрены две задачи. Первая задача состоит в нахождении решения системы уравнений *(1)* при следующих граничных условиях

$$\begin{gathered} y_2^1(0,\lambda)=y_1^1(0,\lambda),\\ y_3^1(0,\lambda)=0 \end{gathered} \tag{3}$$

и заданной асимптотике

$$y_1^1(x,\lambda)=A_1\exp(i\lambda\xi_1 x)+o(1), \quad x\to+\infty\,. \tag{4}$$

Вторая задача состоит в нахждении решения системы уравнений *(1)* с граничными условиями

$$\begin{gathered} y_3^2(0,\lambda)=y_1^2(0,\lambda),\\ y_2^2(0,\lambda)=0 \end{gathered} \tag{5}$$

и заданной асимптотикой.

$$y_1^2(x,\lambda)=A_2\exp(i\lambda\xi_1 x)+o(1), \quad x\to+\infty\,. \tag{6}$$

Совместное рассмотрение этих задач будем называть задачей рассеяния для системы *(1)*.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию (2). Тогда существует и единственно ограниченное решение задачи рассеяния для системы (1) на полуоси, т.е. задач (1)-(3)-(4) и (1)-(5)-(6).*

Доказательство. Задача рассеяния для первой и второй задач на полуоси эквивалентна следующим системам интегральных уравнений

$$y_1^p(x) = A_p \exp(i\lambda\xi_1 x) + i\int_x^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{1j}(x')y_j^p(x')\exp(i\lambda\xi_1(x-x'))dx',$$

$$y_k^p(x) = B_{k-1}^p \exp(i\lambda\xi_k x) + i\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{kj}(x')y_j^p(x')\exp(i\lambda\xi_k(x-x'))dx', \qquad (7)$$

$$(p=1,2;\ k=2,3)$$

где

$$B_1^1 = A_1 + i\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[c_{1j}(x')\exp(-i\lambda\xi_1 x') - c_{2j}(x')\exp(-i\lambda\xi_2 x')\right]y_j^1(x')dx',$$

$$B_2^1 = -i\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{3j}(x')\exp(-i\lambda\xi_3 x)y_j^1(x')dx',$$

$$B_1^2 = -i\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{3} c_{2j}(x')\exp(-i\lambda\xi_2 x')y_j^2(x')dx',$$

$$B_2^2 = A_2 + i\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left[c_{1j}(x')\exp(-i\lambda\xi_1 x') - c_{3j}(x')\exp(-i\lambda\xi_3 x')\right]y_j^2(x')dx'. \ (8)$$

В силу сходимости метода последовательных приближений существование и единственность решения системы интегральных уравнений *(7)* в классе ограниченных функций следует из вольтерровости этих уравнений. Теорема доказана.

С другой стороны, из соотношения *(7)* с учетом *(2)* вытекает справедливость равенств

$$y_1^p(x) = A_p\exp(i\lambda\xi_1 x) + o(1),$$
$$y_2^p(x) = B_1^p\exp(i\lambda\xi_2 x) + o(1), \qquad x\to+\infty$$
$$y_3^p(x) = B_2^p\exp(i\lambda\xi_3 x) + o(1), \qquad (p=1,2). \qquad (9)$$

Каждой функции $A_p\exp(i\lambda\xi_1 x)$, $p=1\ (p=2)$ соответствуют единственные решения задачи рассеяния для первой $(p=1)$ и второй задач $(p=2)$, имеющее асимптотике $B_1^1\exp(i\lambda\xi_2 x)$, $B_2^1\exp(i\lambda\xi_3 x)$ $(p=1)$, $B_1^2\exp(i\lambda\xi_2 x)$, $B_2^2\exp(i\lambda\xi_3 x)$ $(p=2)$. Тем самым можно определить функции $S_{11}(\lambda)$, $S_{21}(\lambda)\ (p=1)$ и $S_{12}(\lambda)$, $S_{22}(\lambda)\ (p=2)$

$$B_1^1 = S_{11}(\lambda)A_1, \qquad B_2^1 = S_{21}(\lambda)A_1, \qquad (10)$$

$$B_1^2 = S_{12}(\lambda)A_2, \qquad B_2^2 = S_{22}(\lambda)A_2. \qquad (11)$$

Таким образом, задача рассеяния на полуоси определяет матрица-функция

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Функцию $S(\lambda)$ назовем функцией рассеяния для системы *(1)* на полуоси.

Если коэффициенты системы *(1)* $c_{ij}(x) \equiv 0$ $(i, j = 1,2,3)$, из *(8)* и *(12)* получаем, что $S(\lambda)$ есть единичная матрица

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Более точное описание структуры функцией-рассеяния получается с привлечением интегрального представления решений.

2. Интегральные представления решений.

Ограниченное решение системы *(1)* на полуоси можно выразить через их асимптотики (т.е. функции $A\exp(i\lambda\xi_1 x)$, $B_1\exp(i\lambda\xi_2 x)$, $B_2\exp(i\lambda\xi_3 x)$), через значений решений при $x = 0$ (т.е. через $y_1(0)$, $y_2(0)$, $y_3(0)$) или через некоторые комбинации этих величин. С этой целью рассмотрим шесть вектор-функций

$$h^1(x,\lambda) = (y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x),\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x)),$$

$$h^2(x,\lambda) = (A\exp(i\xi_1\lambda x),\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x)),$$

$$h^3(x,\lambda) = (A\exp(i\xi_1\lambda x),\ B_1\exp(i\xi_2\lambda x),\ y_3(0)\exp(i\xi_3\lambda x)),$$

$$h^4(x,\lambda) = (A\exp(i\xi_1\lambda x),\ B_1\exp(i\xi_2\lambda x),\ B_2\exp(i\xi_3\lambda x)),$$

$$h^5(x,\lambda) = (y_1\exp(i\xi_1\lambda x),\ B_1\exp(i\xi_2\lambda x),\ B_2\exp(i\xi_3\lambda x)),$$

ы $$h^6(x,\lambda) = (y_1(0)\exp(i\xi_1\lambda x),\ y_2(0)\exp(i\xi_2\lambda x),\ B_2\exp(i\xi_3\lambda x)). \quad (13)$$

Лемма 1. *Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию (2). Тогда для каждого ограниченного решения справедливо интегральное представление*

$$y_i(x) = h_i^1(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{3}\int_{\xi_3 x}^{\xi_1 x} R_{ij}^1(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \cdot y_j(0), \quad (1_1)$$

$$y_i(x) = h_i^2(x,\lambda) + A\cdot\int_{-\infty}^{\xi_1 x} R_{i1}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + \sum_{j=2}^{3}\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{ij}^2(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \cdot y_j(0), \quad (1_2)$$

$$y_i(x) = h_i^3(x,\lambda) + A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} R_{i1}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B_1\int_{-\infty}^{\xi_2 x} R_{i2}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau +$$

$$+ y_3(0)\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{i3}^3(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau, \quad (1_3)$$

$$y_i(x) = h_i^4(x,\tau) + A\cdot\int_{\xi_1 x}^{+\infty} R_{i1}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B_1\int_{-\infty}^{\infty} R_{i2}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau +$$

$$+ B_2\int_{-\infty}^{\xi_3 x} R_{i3}^4(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau, \quad (1_4)$$

$$y_i(x) = h_i^5(x,\tau) + y_1(0)\int_{\xi_1 x}^{+\infty} R_{i1}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau + B_1\int_{\xi_2 x}^{+\infty} R_{i2}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau +$$

$$+B_2\int_{-\infty}^{\infty}R_{i3}^5(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\ ,\qquad (1_5)$$

$$y_i(x)=h_i^6(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{2}\int_{\xi_2 x}^{\infty}R_{ij}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\cdot y_j(0)+B\int_{\xi_3 x}^{\infty}R_{i3}^6(x,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\,.\quad (1_6)$$

Ядра этих представлений однозначно определяются коэффициентами $c_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,3)$ *системы (1).*

Доказательство леммы аналогично методам работы [5, 6].

3. Свойства матрицы рассеяния.

Интегральные представления *(1_1-1_6)* позволяют установить важные связи между компонентами вектор $h^i(x,t)(i=1,\dots,6)$.

Лемма 2. *Если* $1-\int_{-\infty}^{0}R_{1k}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\neq 0\quad (k=2,3)$, *то для любых* A_1, A_2

$$y_1^1(0,\lambda)=y_2^1(0,\lambda)=\left(1+G_{1-}^1(\lambda)\right)A_1,\qquad (14)$$

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=\left(1+G_{1-}^2(\lambda)\right)A_2,\qquad (15)$$

где

$$G_{1-}^1(\lambda)=\left(1-\int_{-\infty}^{0}R_{12}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)^{-1}\left(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)-1,\qquad (16)$$

$$G_{1-}^2(\lambda)=\left(1-\int_{-\infty}^{0}R_{13}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)^{-1}\left(1+\int_{-\infty}^{0}R_{11}^2(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)-1.\qquad (17)$$

Доказательство. Из *(1_2)* учитывая *(3)* и *(5)* получаем соответственно *(14)* и *(15)*.

Лемма 3. *Если* $1-\int_{0}^{\infty}R_{31}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\neq 0,\ 1+\int_{0}^{\infty}R_{33}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\neq$ $\neq 0$, *то для любых* B_2^1, B_2^2

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=\left(1+E_+(\lambda)\right)B_2^2,\qquad (18)$$

$$B_2^1=e_+(\lambda)y_1^1(0,\lambda),\qquad (19)$$

где

$$E_+(\lambda)=\left(1-\int_{0}^{+\infty}R_{31}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)^{-1}\left(1+\int_{0}^{+\infty}R_{33}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)-1,\qquad (20)$$

$$e_+(\lambda)=-\left(1+\int_{0}^{+\infty}R_{33}^6(0,\tau)\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\right)^{-1}\int_{0}^{\infty}\left[R_{31}^6(0,\tau)+R_{32}^6(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\,\tau)d\tau\,.\qquad (21)$$

Доказательство. Из *(1_6)*, учитывая граничные условия *(3)* и *(5)* имеем *(18)* и *(19)*.

Лемма 4. *Если* $A_1 = A_2$ *и* $1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{23}^3(0,\tau)-R_{13}^3(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau \neq 0$, *то*

$$y_1^1(0,\lambda)=y_2^1(0,\lambda)=(1+F_-(\lambda))(B_1^1-B_1^2), \qquad (22)$$

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=(1+L_-(\lambda))(B_1^1-B_1^2), \qquad (23)$$

где

$$F_-(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{0}R_{22}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-\left(1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{22}^3(0,\tau)-R_{12}^3(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\left(1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{23}^3(0,\tau)-R_{13}^3(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\cdot\int\limits_{-\infty}^{0}R_{23}^3(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau, \qquad (24)$$

$$L_-(\lambda)=\left(1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{23}^3(0,\tau)-R_{13}^3(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{22}^3(0,\tau)-R_{12}^3(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)-1. \qquad (25)$$

Доказательство леммы получается из *(I₃)* путем вычитания решения первой и второй задач.

Лемма 5. *Если* $B_2^1 = B_2^2$ *и* $1-\int\limits_{0}^{+\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\neq 0$, *то*

$$y_1^1(0,\lambda)=y_2^1(0,\lambda)=(1+m_+(\lambda))(B_1^1-B_1^2), \qquad (26)$$

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=M_+(\lambda)(B_1^1-B_1^2), \qquad (27)$$

где

$$m_+(\lambda)=\left[1-\int\limits_{0}^{+\infty}R_{21}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau-\left(1-\int\limits_{0}^{+\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{0}^{+\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right]^{-1}\left[1+\int\limits_{0}^{+\infty}R_{22}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\left(1-\int\limits_{0}^{+\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\int\limits_{0}^{\infty}R_{32}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right]-1, \qquad (28)$$

$$M_+(\lambda)=\left(1-\int\limits_{0}^{+\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\left[(1+m_+(\lambda))\int\limits_{0}^{\infty}R_{31}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\infty}R_{32}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right]. \qquad (29)$$

Доказательство этой леммы аналогично леммы 4 и получается из представлений *(I₅)*.

Лемма 6. *Если* $B_1^1 = B_1^2$ *и* $1+\int\limits_0^{+\infty}\left[R_{11}^4(0,\tau)-R_{21}^4(0,\tau)-R_{31}^4(0,\tau)\right]\times$
$\times\exp(i\lambda\tau)d\tau\neq 0$, *то*

$$y_1^1(0,\lambda)=y_2^1(0,\lambda)=d_1(\lambda)\left(B_2^1-B_2^2\right), \tag{30}$$

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=d_2(\lambda)\left(B_2^1-B_2^2\right), \tag{31}$$

$$A_1-A_2=R(\lambda)\left(B_2^1-B_2^2\right), \tag{32}$$

где

$$R(\lambda)=\left(1+\int\limits_0^{+\infty}\left[R_{11}^4(0,\tau)-R_{21}^4(0,\tau)-R_{31}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau\right)^{-1}\times$$

$$\left(1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R_{33}^4(0,\tau)+R_{23}^4(0,\tau)-R_{13}^4(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\ \tau)\right), \tag{33}$$

$$d_1(\lambda)=R(\lambda)\int\limits_0^{+\infty}R_{21}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{0}R_{23}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau, \tag{34}$$

$$d_2(\lambda)=-\left[1+\int\limits_{-\infty}^{0}R_{33}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau+R(\lambda)\int\limits_0^{+\infty}R_{31}^4(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\right]. \tag{35}$$

Доказательство этой леммы получается из представления *(1₄)*, аналогично леммы 5.

Лемма 7. *Если* $B_2^1+B_2^2=0$ *и* $1-\int\limits_0^{+\infty}R_{k1}^5(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau\neq 0\quad(k=2,3)$,

то

$$y_1^1(0,\lambda)=y_2^1(0,\lambda)=\left(1+H_+(\lambda)\right)\left(B_1^1-B_1^2\right), \tag{36}$$

$$y_1^2(0,\lambda)=y_3^2(0,\lambda)=F_+(\lambda)\left(B_1^1-B_1^2\right), \tag{37}$$

где

$$H_+(\lambda)=m_+(\lambda), \tag{38}$$

$$F_+(\lambda)=-M_+(\lambda). \tag{39}$$

Доказательство. Принимая во внимание $B_2^1+B_2^2=0$ из представлений *(1₅)* легко убедиться в справедливости *(36)* и *(37)*.

Теперь установим свойства матрица рассеяния $S(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию (2). Тогда для системы (1) кроме конечного числа* λ *матрица рассеяния* $S(\lambda)$ *имеет обратный* $S^{-1}(\lambda)=\left\|\gamma_{ij}(\lambda)\right\|_{i,j=1}^2$. *Более того, функции* $S_{22}(\lambda),\ \gamma_{11}(\lambda),\ \left(\gamma_{12}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda)\right)$ *допускает факторизацию*

$$S_{22}(\lambda)=\left(1+E_+(\lambda)\right)^{-1}\left(1+G_{1-}^2(\lambda)\right), \tag{40}$$

$$\gamma_{11}(\lambda)=\left(1+G_{1-}^1(\lambda)\right)^{-1}\left(1+m_+(\lambda)\right), \tag{41}$$

$$\gamma_{12}(\lambda)+\gamma_{22}(\lambda)=\left(1+R_+(\lambda)\right)^{-1}\left(1+R_-(\lambda)\right), \tag{42}$$

а функции $S_{11}(\lambda)-S_{12}(\lambda),\ \gamma_{21}(\lambda),\ \gamma_{12}(\lambda),\ \gamma_{22}(\lambda)$ *имеют вид*

$$S_{11}(\lambda)-S_{12}(\lambda)=(1+F_-(\lambda))^{-1}(1+G^1_{1-}(\lambda)), \qquad (43)$$

$$\gamma_{21}(\lambda)=(1+G^2_{1-}(\lambda))^{-1}M_+(\lambda), \qquad (44)$$

$$\gamma_{12}(\lambda)=(1+G^1_{1-}(\lambda))^{-1}d_1(\lambda), \qquad (45)$$

$$\gamma_{22}(\lambda)=-(1+G^2_{1-}(\lambda))^{-1}d_2(\lambda). \qquad (46)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно получаются из лемм 2-7. Метод доказательства аналогично методам теоремы 2 работы [6].

4. Обратная задача рассеяния.

Обратная задача рассеяния для системы *(1)* состоит в восстановлении коэффициентов уравнений по известной функции рассеяния $S(\lambda)$.

Обратную задачу рассеяния на полуоси сведем к обратной задаче для системы *(1)* на всей оси с дополнительным условием равенства нулю коэффициентов при $x<0$.

Введем в рассмотрение матрица перехода $\Pi(\lambda)$, связывающий коэффициентов асимптотики (A, B_1, B_2) ограниченного решения системы *(1)* с граничными значениями решения при $x=0$, т.е. $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))$.

Учитывая определение $\Pi(\lambda)$ в интегральном представлении *(1_4)* получаем

$$\Pi(\lambda)=\begin{pmatrix} 1+R^4_{11+}(\lambda) & R^4_{12}(\lambda) & R^4_{13-}(\lambda) \\ R^4_{21+}(\lambda) & 1+R^4_{22}(\lambda) & R^4_{23-}(\lambda) \\ R^4_{31+}(\lambda) & R^4_{32}(\lambda) & 1+R^4_{33-}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (47)$$

где $R^4_{ik\pm}(\lambda)=\pm\int\limits_0^{\pm\infty}R_{ik}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $R^4_{i2}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}R^4_{i2}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$.

Обозначим через N нули функций $1+\int\limits_{-\infty}^{0}R^2_{11}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1-$ $-\int\limits_{-\infty}^{0}R^2_{1k}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau \quad (k=2,3)$, $1+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R^3_{23}(0,\tau)-R^3_{13}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1+$ $+R_+(\lambda)=1+\int\limits_0^{+\infty}\left[R^4_{11}(0,\tau)-R^4_{21}(0,\tau)-R^4_{31}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1+R_-(\lambda)=1+$ $+\int\limits_{-\infty}^{0}\left[R^4_{33}(0,\tau)+R^4_{23}(0,\tau)-R^4_{13}(0,\tau)\right]\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1-\int\limits_0^{\infty}R^5_{k1}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $(k=2,3)$, $1-\int\limits_0^{\infty}R^6_{31}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1+\int\limits_0^{\infty}R^6_{33}(0,\tau)\exp(i\lambda\tau)d\tau$, $1+m_+(\lambda)$, $1-$ $-M_-(\lambda)$.

Можно легко доказать что, эти функции имеют конечное число нулей (лемма 2 [1]).

Теорема 3. *Пусть* $S(\lambda)=\|S_{ij}\|_{i,j=1}^{2}$ *- матрица рассеяния на полуоси для системы (1) с коэффициентами* $c_{ij}(x)$, *удовлетворяющими условиям (2) и* $\lambda\in C|N$. *Тогда матрица перехода* $\Pi(\lambda)$ *выражается через элементы* $S(\lambda), S^{-1}(\lambda)$ *матрица рассеяния и функции* $R_+(\lambda), M_+(\lambda), m_+(\lambda)$ *(*$R_-(\lambda)$, $G_{1-}^1(\lambda), G_{1-}^2(\lambda)$*) аналитических в полуплоскостях* $\Pi_+=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda>0\}$ *(*$\Pi_-=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda<0\}$*) и непрерывных, включая границу* $\{\lambda;\operatorname{Im}\lambda=0\}$ *следующим образом:*

$$R_{21+}^4(\lambda)(1+R_+(\lambda))^{-1}+R_{23-}^4(\lambda)(1+R_-(\lambda))^{-1}=d_1(\lambda)(1+R_-(\lambda))^{-1},$$
$$-R_{31+}^4(\lambda)(1+R_+(\lambda))^{-1}+R_{33-}^4(\lambda)(1+R_-(\lambda))^{-1}=(d_2(\lambda)-1)(1+R_-(\lambda))^{-1},$$
$$R_{11+}^4(\lambda)=R_+(\lambda)+R_{21+}^4(\lambda)+R_{31+}^4(\lambda),\quad R_{13-}^4(\lambda)=R_{33-}^4(\lambda)+R_{23-}^4(\lambda)-R_-(\lambda),$$
$$R_{12}^4(\lambda)=1+m_+(\lambda)-M_+(\lambda)-(1+R_{11+}^4(\lambda))(\gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{21}(\lambda)),$$
$$R_{22}^4(\lambda)=m_+(\lambda)-R_{21+}(\lambda)(\gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{21}(\lambda)),$$
$$R_{32}^4(\lambda)=-M_+(\lambda)-R_{31+}^4(\lambda)(\gamma_{11}(\lambda)+\gamma_{21}(\lambda)). \qquad (48)$$

Здесь функции $R_+(\lambda), R_-(\lambda)$, $G_{1-}^1(\lambda), G_{1-}^2(\lambda)$, $m_+(\lambda)$, $M_+(\lambda)$ (формулы *(40)-(44)*), $R_{21+}^4(\lambda), R_{23-}^4(\lambda), R_{31+}^4(\lambda), R_{33-}^4(\lambda)$ находится с помощью задачи Римана, а $d_1(\lambda)$ и $d_2(\lambda)$с помощью формул *(45)-(46)*.

Метод доказательства этой теоремы аналогично методам работы [5-6].

Поскольку для системы уравнений *(1)* на всей оси обратная задача разрешима и подробно изложена в [2- 4], то используя теоремы 3, приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты системы уравнений (1) удовлетворяют условиям (2). Тогда по матрицу рассеяния* $S(\lambda)(\lambda\in C|M)$ *для системы (1) на полуоси коэффициенты* $c_{ij}(x)$ *определяются однозначно.*

Формулы *(40)-(48)* вместе с процедурой решения обратной задачи на всей оси составляют алгоритм решения обратной задачи рассеяния для системы *(1)* на полуоси.

Литература

[1]. Нижник Л.П., Ву Ф.Л. *Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряженной потенциальной матрицей.* Укр.мат.журн. –1974. –26, №4. –С.469-486.

[2]. Шабат А.Б. *Функциональный анализ и его приложение.* 1975, т.9, №3, с.75-79. Дифф.ур., 1979, т.15, с.1824-1834.

[3]. Kaup D.J. *The three-wave interaction-nondispersive phenomenon.* Studies in applied mathemetics 55,.9-44 (1976).

[4]. Beals R. and Coifman R.R. *Scattering and invers scattering for first order systems.* Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXXVII, p.39-90

(1984).

[5]. Искендеров Н.Ш. *Прямая и обратная задачи рассеяния для системы трех гиперболических уравнений первого порядка на полуоси с заданными рассеянными волнами.* –Киев, 1985. –20с. –(Препринт/АН УССР. Ин-т математики: 85-87).

[6]. Нижник Л.П., Искендеров Н.Ш. *Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений первого порядка на полуоси.* Укр.мат.журн. –1990. –42,№7. –С.931-938.

İskenderov N.Ş.

BİRİNCİ MƏRTƏBƏDƏN ÜÇ ADI DİFFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN YARIM OXDA TƏRS SƏPƏLƏNMƏ MƏSƏLƏ

Bu məqalədə birinci mərtəbədən üç adi differensial tənliklər sistemi üçün yarım oxda düz və tərs səpələnmə məsələsi öyrənilmişdir. Tənliklər sisteminin əmsalları saçılma matrisinə görə bir qiymətli olaraq tapılmışdır.

Iskenderov N.Sh.

INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR THE FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEM OF THREE EQUATIONS ON A SEMI-AXIS

In this paper, the direct and inverse scattering problem for first order ordinary differential system of three equations on a semi-axis is studied. The coefficients of the system are uniquely determined according to scattering matrix.