УДК 517.5

АЛИЕВ Б.Г.

ОБ *A* - ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОТОРЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ

Пусть D единичный круг и T единичная окружность на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $A(D)$ множество всех функций, аналитических в D. Граничные значения функций класса $H_1(D)$ интегрируема в смысле Лебега на подмножествах единичного круга. Аналогичная задача для функций класса $H_{1,0}(D)$ в смысле Лебега не выполняется. В этой статье доказывается A - интегрируемость граничных значений на почти всех дугах единичного круга для функций класса $H_{1,0}(D)$.

Пусть $f \in A(D)$ и $\alpha > 1$.

Положим

$$f_\alpha^*(t) = \sup\left\{|f(z)| : z \in D, |z-t| < \alpha\rho(z,T)\right\}$$

здесь $\rho(z,T)$ - евклидово расстояние от точки $z \in C$ до множества T.

Будем говорить, что функция $f \in A(D)$ удовлетворяет условию (*), если при некотором $\alpha > 1$,

$$m\left\{t \in T: f_\alpha^*(t) > \lambda\right\} = 0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \to \infty \qquad (*)$$

Обозначим через $f \in H_{1,0}(D)$ множество всех функций, аналитических в D и удовлетворяющих условию (*) (см. [2]).

Пусть

$$f \in H_{1,0}(D), D = \left\{z \in C: |z| < 1\right\}, \quad T = \partial D = \left\{z \in C: |z| = 1\right\}.$$

Определим множество B следующим образом:

$$B = \left\{t \in T: f_\beta^*(t) < +\infty\right\}.$$

Скажем, что m- измеримая функция $h:[0,2\pi] \to C$ A- интегрируема на $E \subset [0,2\pi]$, если

1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda m\left\{\theta \in E: |h(\theta)| > \lambda\right\} = 0$

2) существует конечный интеграл

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\{\theta \in E: |h(\theta)| < \lambda\}} h(\theta) d\theta$$

и обозначаем через

$$(A)\int_E h(\theta) d\theta$$

Далее, пусть функция $f(z)$ класса Харди H^1 внутри единичной окружности T и $f(t)$ ее некасательные граничные значения. Возьмем произвольное множество точек $E \in T$ положительной m- меры. Здесь и в дальнейшем через m будем обозначать линейную меру Лебега на T.

Необходимо заметить, что класс функций $H_{1,0}(D)$ несколько шире, чем класс $H^1(D)$.

На этой статье доказывается A- интегрируемость $f(t)$ на "почти всех" дугах единичной окружности.

Лемма 1. *Пусть* $f \in H_{1,0}(D)$. *Тогда* $mes[T \setminus B] = 0$.

Доказательство. Действительно

$$T = \left\{t \in T : f_\beta^*(t) \le +\infty\right\} = \left\{t \in T : f_\beta^*(t) < +\infty\right\} \cup \left\{t \in T : f_\beta^*(t) = +\infty\right\}$$

Учитывая, что $f \in H_{1,0}(D)$ получаем

$$mes\left\{t \in T : f_\beta^*(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \to +\infty \tag{1}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$mes\left\{t \in T : \quad f_\beta^*(t) = +\infty\right\} = 0$$

Тогда

$$mesT = mes\left\{t \in T: \quad f_\beta^*(t) < +\infty\right\} \cup \left\{t \in T: \quad f_\beta^*(t) = +\infty\right\} =$$

$$mes\left\{t \in T: \quad f_\beta^*(t) < +\infty\right\} + mes\left\{t \in T: \quad f_\beta^*(t) = +\infty\right\} = mesB$$

Отсюда

$$mes[T \setminus B] = 0.$$

На этом лемма доказана.

Пусть $t_1 \in B,\ t_2 \in B$.

Обозначим через $E = T_{t_1 t_2}$ дугу единичной окружности, концы которых принадлежат в множестве B.

Из леммы и из определения множества B немедленно следует, что в конечных точках множества E некасательная максимальная функция принимает конечные значения.

Тогда справедлива теорема

Теорема 1. *Пусть* $f \in H_{1,0}(D)$.

Тогда

1) *некасательные граничные значения на E существует;*
2) *интеграл* $(A)\int_E f(t)dt$ *существует;*
3) *справедливо соотношение*

$$(A)\int_E f(t)dt = \lim_{r \to 1-0} \int_{\{t \in E : |f(t)| \le \lambda\}} f(rt)dt.$$

Доказательство. Из определения A- интеграла немедленно следует, что

$$mes\left\{t \in E : f(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \to +\infty$$

Действительно, для любого $t \in T$

$$f_\beta^*(t) = \sup\left\{\left|f(t)\right|;\ z \in S_{t,\beta}\right\} \ge \left|f(z)\right|,\ \ z \in S_{t,\beta}$$

то из

$$\forall t \in T \& \forall z \in S_{t,\beta} \left|f(z)\right| \le f_\beta^*(t)$$

Функция класса $H_{1,0}$ имеют некасательные граничные значения на единичной окружности почти всюду. Учитывая это переходим к лимиту при $z \to t$ и немедленно получаем

$$\left|f(t)\right| \le f_\beta^*(t)$$

Последнее доказывает справедливость соотноршения

$$mes\left\{t \in E : f(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \to +\infty$$

Докажем, что существует следующий предел

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\left\{t \in E : \left|f(t)\right| \le \lambda\right\}} f(t)dt$$

Определим множество G следующим образом

$$G = \left\{\rho e^{i\varphi} : r < \rho < 1, \theta < \varphi < \tau\right\}$$

$$t_1 = e^{i\theta}, t_2 = e^{i\tau}, \theta, \tau \in (0, 2\pi)$$

$$\partial G = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

Здесь

$$\gamma_1 = \left\{\rho e^{i\tau} : r \le \rho \le 1\right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{r e^{i\varphi} : \theta \le \varphi \le \tau\right\} \qquad (2)$$

$$\gamma_3 = \left\{\rho e^{i\theta} : r \le \rho \le 1\right\}$$

$$\gamma_4 = \left\{e^{i\varphi} : \theta \le \varphi \le \tau\right\}$$

Функция $f_{G,\alpha}^*$ для области G определяется следующим образом

$$f_{G,\alpha}^*(t) := \sup\left\{\left|f(z)\right| : z \in S_{t,\alpha}\right\} \qquad (3)$$

$$S_{t,\alpha} = \left\{z \in G : \left|z - t\right| < \alpha\rho(z, \gamma)\right\}, \alpha > 1, t \in \gamma$$

Соотношение (1) для функции f выполняется для определенного $\beta > 1$. Тогда известно, что для любого $\beta, \beta^1 > \beta > 1$ (1) выполняется автоматически. Поэтому не нарушая общности можно взять $\beta > 3$.

Докажем, что для

$$\alpha = \frac{\beta - 1}{2} \qquad (4)$$

$$mes\left\{t \in \gamma : f_{G,\alpha}^*(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \to +\infty \qquad (5)$$

Для того, чтобы доказать справедливость соотношения (5) нужно доказать ограниченность функции $f_{G,\alpha}^*$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ и выполнение соотношения

$$mes\left\{t \in \gamma_4 : f_{G,\alpha}^*(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \to +\infty \qquad (6)$$

Сначала докажем справведливость последнего соотношения.

Из (4) получается, что $\beta > \alpha$. Последняя конструкция показывает, что

$$\rho(z, \gamma) \le \rho(z, \gamma_4) = \rho(z, T),\ z \in G$$

Тогда для любого $t \in \gamma_4$

$$f^*_{G,\alpha}(t) = \sup\left\{\left|f(z)\right|, z \in G : \left|z-\alpha\right| < \alpha\rho(z,\gamma)\right\} \le \sup\left\{\left|f(z)\right|, \left|z-t\right| < \beta\rho(z,\gamma)\right\} =$$
$$= \sup\left\{\left|f(z)\right| : \left|z-t\right| < \beta\rho(z,T)\right\} = f^*_\beta(t)$$

Значит, для каждого $t \in \gamma_4$

$$f^*_{G,\alpha}(t) \le f^*_\beta(t), \quad t \in \gamma_4$$

Тогда

$$\left\{t \in \gamma_4 : f^*_{G,\alpha}(t) > \lambda\right\} \subset \left\{t \in \gamma_4 : f^*_\beta(t) > \lambda\right\} \tag{7}$$

Отсюда

$$mes\left\{t \in \gamma_4 : f^*_{G,\alpha}(t) > \lambda\right\} \le mes\left\{t \in \gamma_4 : f^*_\beta(t) > \lambda\right\}$$

по условию (1)

$$mes\left\{t \in \gamma_4 : f^*_\beta(t) > \lambda\right\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to +\infty$$

Это показывает справедливость условия (6).

Сейчас покажем ограниченность функции $f^*_{G,\alpha}$ на множестве $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Сначала покажем, что $f^*_{G,\alpha}$ ограничена γ_3. Для $t \in \gamma_4$ $S_{t,\alpha} \subset S_{t_1,\beta}$. Действительно, допустим, что $t_1' \in \gamma_3$. Тогда $\forall z \in S_{t_2',\alpha}$ выполняется $z \in S_{t_1',\beta}$. На самом деле, для $z \in S_{t_2',\alpha}$.

$$\left|z - t_2'\right| < \alpha\rho(z,\gamma) \tag{8}$$

$$\left|z - t_1\right| \le \left|z - t_2'\right| + \left|t_2' - t_1\right| \tag{9}$$

$$\left|t_2' - t_1\right| < \left|t_2' - t'\right| \le \left|z - t_2'\right| + \left|z - t'\right| \tag{10}$$

здесь

$$t' \in \gamma_4 \,\&\, t' \ne t_1, z = \rho e^{\arg t'}, r < \rho < 1.$$

С другой стороны

$$\left|z - t'\right| = \rho(z,\gamma_4) = \rho(z,T) \tag{11}$$

Учитывая последнее получаем

$$\left|z - t_1\right| \le 2\left|z - t_2'\right| + \left|z - t'\right| < 2\alpha\rho(z,\gamma) + \rho(z,T) \le$$
$$= (2\alpha+1)\rho(z,T) = \beta\rho(z,T)$$
$$\left|z - t_1\right| < \beta\rho(z,T)$$

Отсюда

$$z \in S_{t_1,\beta} \Rightarrow S_{t_2',\alpha} \subset S_{t_1,\beta}$$

$$t_1 \in B = \left\{t \in T : f^*_\beta(t) < +\infty\right\}$$

и получаем, что

$$f^*_\beta(t_1) = M_1 < +\infty. \tag{12}$$

Для любого $t \in \gamma_3$

$$f^*_{G,\alpha}(t) = \sup\left\{\left|f(z)\right| : z \in S_{t,\alpha}\right\} \le$$
$$\le \sup\left\{\left|f(z)\right|, z \in S_{t_1,\beta}\right\} = f^*_\beta(t_1) = M_1 < +\infty \tag{13}$$

Последнее показывает ограниченность функции $f^{*}_{G,\alpha}$ на γ_3. Аналогичным образом можно доказать ограниченность $f^{*}_{G,\alpha}$ на γ_1, то из

$$\exists M_2 > 0 \quad \forall t \in \gamma_1 \quad f^{*}_{G,\alpha}(t) \le f^{*}_{\beta}(t_2) = M_2 < +\infty \tag{14}$$

Докажем, что функция $f^{*}_{G,\alpha}$ ограничена на γ_2. Возьмем точку z_0 из G, что для него

$$|z_0 - t| = \beta\rho(z_0, \gamma_4) \tag{15}$$

$t \in \gamma_2$. Точка z_0 лежит на луче проходящей из точки t и исходящей из центра окружности. Существование точки z_0 получается из одной известной теоремы и из построения пропорциональных отрезков.

$$|z_0 - t| + \rho(z_0, \gamma_4) = \varepsilon \tag{16}$$

Из (15) и (16)

$$\beta\rho(z_0, \gamma_4) + \rho(z_0, \gamma_4) = \varepsilon$$

отсюда

$$\rho(z_0, \gamma_4) = \frac{\varepsilon}{1+\beta} < 1 \tag{17}$$

$$|z_0 - t| = \frac{\varepsilon}{1+\beta}\beta < 1 \tag{18}$$

Для окружности радиуса $r_1 = 1 - \varepsilon + |z_0 - t|$

$$r_1 = 1 - \varepsilon + |z_0 - t| = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\beta}\beta =$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)(1+\beta) + \varepsilon\beta}{1+\beta} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\beta} < 1$$

$$r_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\beta} < 1$$

Возьмем точку z_1 из пересечения окружности радиуса r_1 и области $S_{t,\alpha}$.

Покажем, что

$$|z_1 - t| > \beta\rho(z_1, \gamma)$$

Действительно,

$$\beta\rho(z_1, \gamma_4) = \beta\rho(z_0, \gamma_4) = |z_0 - t| < |z_1 - t|$$

значит

$$\beta\rho(z, \gamma) \le \beta\rho(z_1, \gamma_4) < |z_1 - t|$$

$\forall t \in \gamma_2$

$$f^{*}_{G,\alpha}(t) = \sup\left\{|f(z)|, z \in S_{t,\alpha}\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{|f(t)|, z \in \bigcap\left\{|z| \le 1 - \frac{\varepsilon}{1+\beta}\right\}\right\} = M_3 < +\infty$$

$$\exists M_3 \quad \forall t \in \gamma_2 \quad f^{*}_{G,\alpha}(t) \le M_3 < +\infty$$

Тогда

$$\forall t \in \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \quad f^{*}_{G,\alpha}(t) \le \{M_1, M_2, M_3\} = M < +\infty$$

Это показывает, что соотношение (5) выполняется на γ.

Функция f аналитична в области G и для него выполняется соотношение (5). Тогда $f \in H_{1,0}(G)$.

Если $f \in H_{1,0}(G)$, тогда существование некасательных угловых граничных значений функции f хорошо известно. С другой стороны

$$(A)\int_{\gamma} f(t)dt = 0$$

Для $t \in \gamma \setminus \gamma_4$ $\left|f(t)\right| \le f^{*}_{G,\alpha}(t) \le M < +\infty$. Поэтому существует интеграл

$$\int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt$$

по Лебегу. Возьмем $\forall \lambda > M$. Тогда

$$\int_{\{t\in\gamma:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt = \int_{\{t\in\gamma\setminus\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}\cup\{t\in\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt =$$
$$= \int_{\{t\in\gamma\setminus\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt + \int_{\{t\in\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt$$

Функция f ограничена на $\gamma \setminus \gamma_4$.

$$\int_{\{t\in\gamma\setminus\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt = \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt$$

$$\int_{\{t\in\gamma:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt = \int_{\{t\in\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt + \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt \tag{19}$$

Из последнего

$$\int_{\{t\in\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt = \int_{\{t\in\gamma:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt - \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt \tag{20}$$

В (20) интегралы стоящие на правой части равенства имеют пределы при $\lambda \to +\infty$, отсюда получается существование предела при $\lambda \to +\infty$ для левой части. Тогда

$$(A)\int_{\gamma_4} f(t)dt = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\{t\in\gamma_4:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_{\{t\in\gamma:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt - \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt \right) =$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\{t\in\gamma:|f(t)|\le\lambda\}} f(t)dt - \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt =$$
$$= (A)\int_{\gamma} f(t)dt - \int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt = -\int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt. \tag{21}$$

Значит,

$$(A)\int_{\gamma_4} f(t)dt = -\int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt. \tag{22}$$

С другой стороны $\gamma_4 = E$. Тогда (21) показывает, что

$$(A)\int_{E} f(t)dt$$

существует. На этом первая часть теоремы доказана.

Сейчас вычислим правую сторону соотношения (21).

$$\int_{\gamma\setminus\gamma_4} f(t)dt = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} f(t)dt = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}\right) f(t)dt = A_1 + A_2 + A_3$$

$$|A_1| = \left|\int_{\gamma_1} f(t)dt\right| \le \int_{\gamma_1} |f(t)|dt \le \int_{\gamma_1} f^{*}_{\beta}(t_1)dt = f^{*}_{\beta}(t_1)\int_{\gamma_1} dt = f^{*}_{\beta}(t_1)m\gamma_1 = f^{*}_{\beta}(t_1)(1-r)$$

В последнем переходим к лимиту при $r \to 1-0$

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{\gamma_1} f(t)dt = 0\,. \tag{23}$$

Аналогично

$$|A_3| = \left|\int_{\gamma_3} f(t)dt\right| \le \int_{\gamma_3} |f(t)|dt \le \int_{\gamma_3} f_\beta^*(t_2)dt = f_\beta^*(t_2)\int_{\gamma_3} dt = f_\beta^*(t_2)m\gamma_3 = f_\beta^*(t_2)(1-r)\,.$$

Отсюда

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{\gamma_3} f(t)dt = 0\,. \tag{24}$$

Из (21) и (22)

$$(A)\int_{\gamma_4} f(t)dt = -\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}\right) f(t)dt\,.$$

Учитывая (23) и (24) из последнего получаем

$$(A)\int_{\gamma_4} f(t)dt = -\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}\right) f(t)dt = -\lim_{r\to 1-0}\int_{\gamma_2} f(rt)rdt = -\lim_{r\to 1-0}\left(\int_{\gamma_4} f(rt)drt\right) =$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\int_{\gamma_4} f(rt)rdt = \lim_{r\to 1-0} r\int_{\gamma_4} f(rt)dt = 1\lim_{r\to 1-0} r\int_{\gamma_4} f(rt)dt = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{r}\lim_{r\to 1-0} r\int_{\gamma_4} f(rt)dt =$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{r}r\int_{\gamma_4} f(rt)dt = \lim_{r\to 1-0}\int_{\gamma_4} f(rt)dt\,.$$

Отсюда,

$$(A)\int_{\gamma_4} f(t)dt = \lim_{r\to 1-0}\int_{E} f(rt)dt\,.$$

На этом теорема доказана.

Литература

[1]. Салимов Т.С. *А - интеграл и граничные значения аналитических функций* // Матем. сборник, 1988, 136(178), №1(5), с.24-40.

[2]. Александров А.Б. *Об А - интегрируемости граничных значений гармонических функций* // Матем. заметки, 1981, т.30, №1, с.59-72.

[3]. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p* // Мир, 1984 ,с.315.

[4]. Привалов И.И. *Граничные свойства аналитических функций* // М.-Л., ГИТТЛ, 1950, с.307.

Əliyev B.G.

ANALİTİK FUNKSİYALARIN SƏRHƏD QİYMƏTLƏRİNİN BƏZİ ÇOXLUQLARDA *A* - İNTEQRALLANMASI

Bu məqalədə $H_{1,0}(D)$ sinfindən olan funksiyaların sərhəd qiymətlərinin bəzi çoxluqlarda A - inteqrallanması müəyyən olunmuşdur. Burada D kompleks müstəvidə vahid dairədir. $H_{1,0}(D)$ sinfindən olan funksiyaların sanki vütün sərhəddə toxunmayan sərhəd qiymətləri mövcuddur və bu sərhəd qiymətləri A - inteqrallanandır. Lakin bu sərhəd qiymətlərinin alt çoxluqlarında inteqralın mövcudluğu məlum deyil. İsbat olunmuşdur ki, vahid çevrənin sanki bütün qövslərində bu inteqral A - inteqral mənada mövcuddur.