УДК 517.95

СОЛТАНОВ К.Н.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДИФИКАЦИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Работа посвящена изучению одного класса модификаций уравнений Навье-Стокса, предложенного Ж.-Л. Лионсом в [1].

Доказана теорема существования решений, а при некоторых дополнительных условиях доказана теорема единственности решения.

Рассматривается следующий класс модификаций уравнений Навье -Стокса, который в модельном случае имеет следующий вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \mu\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\left|u_k\right|^{p-2} D_i u_k\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u_k + grad p = h_k(t,x), \qquad (1)$$

$$div u_k = 0,\ (x,t)\in Q = \Omega\times(0,T),\ T>0,\ k=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$u_k(x,0)=0,\ u_k\big|_{\Gamma}=0,\quad \Gamma=\partial\Omega\times[0,T],\quad \mu>0, \qquad (3)$$

здесь $\Omega\subset R^n, n\geq 1$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $h=(h_1,\ldots,h_n), u_i(x,t), h_i(x,t), i=\overline{1,n}, p(x,t)$ – некоторые, вообще говоря, обобщенные функции, $p\geq 2, \mu>0$ - некоторые числа.

Задача (1)-(3) является модификацией задачи Навье - Стокса, предложенной в [1], где она поставлена как проблема. Другая модификация уравнений Навье - Стокса, была предложена О.А. Ладыженской и изучена в работе [2], а затем и в других работах (см.[1,3,4] и литературу в них). Для модификации, предложенной в [2], там же доказано существование, а при некоторых дополнительных условиях и единственность решения . В [1,3,4] вопрос о существовании и единственности решения исследован при некоторых других условиях.

Следует отметить, что задачи для уравнений Навье -Стокса изучены многими авторами, в основном, в двумерном случае и несколько меньше в трехмерном случае. Но, до настоящего времени вопрос о корректности этих задач в трехмерном случае остается открытым. По существу, это и является причиной того, что были предложены и исследованы различные варианты модификаций этих уравнений, которые могут быть математической моделью процессов, аналогичных процессам описывающихся уравнениями Навье - Стокса .

В настоящей работе исследуется вопрос о разрешимости задачи (1)-(3) и доказывается существование и единственность решения этой задачи.

Доказательство разрешимости для поставленной задачи проводится методом компактности. Для этого вначале, (а именно, после формулировки теоремы существования для задачи (1)-(3) и одной общей теоремы разрешимости), изучается некоторый класс pn – пространств, типа пространств, исследованных в работах [5,6].

1.Формулировка теоремы существования.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\Omega\subset R^n$ такая же область как и выше. Рассмотрим следующие pn – пространства функций $v:\Omega\to R^1$

$$S_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \left\{ v(x) \in L_1(\Omega) \left| [v]_S \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} |v|^{\alpha} |D_i v|^{\beta} dx \right)^{1/(\alpha+\beta)} + \|v\|_{L_{\alpha+\beta}(\Omega)} < +\infty \right. \right\} \quad (4)$$

$$\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv S_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \cap \left\{ v(x) \middle| v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

где $\alpha \geq 0, \beta \geq 1, 1 = \overline{1,n}$ – некоторые числа. Заметим, что такого типа пространства ранее изучены в работах [5,6,8] и др..

Следуя [1] через $V_q^*(\Omega)$ обозначим следующее пространство

$$V_q^*(\Omega) \equiv (V_p(\Omega))^* \equiv \left(\left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \right)^n \cap \{ v(x) | div\, v = 0 \} \right)^*, \quad (5)$$

т.е. $V_q^*(\Omega)$ является сопряженным пространством к $V_p(\Omega)$, определенным аналогично определению такого типа пространства из [1].Здесь

$W_p^1(\Omega) \equiv \left\{ u(x) \middle| u(x), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_p(\Omega), i = \overline{1,n} \right\}$ - пространство Соболева (см. [7]).

Далее, через $\widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$ обозначим следующее пересечение

$$\widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \left(\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \right)^n \cap \{ v(x) | div\, v = 0 \}, \quad (6)$$

которое требует дополнительного объяснения. А именно, в определении (6) равенство $div\, v = 0$ понимается следующим образом: будем говорить, что $u(x) \in \left(\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \right)^n$ содержится в пространстве $\widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$, если для любого $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha+\beta}(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u v dx \equiv -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_i u D_i v dx$$

при этом числа $\alpha \geq 0, \beta \geq 1$ предпологаются такими, что интеграл в правой части имеет смысл ; кроме того , при $u_i(x) \in W_p^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega), i = \overline{1,n}$ имеет место равенство: $\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u u dx = 0,$ где $p = \alpha + \beta \geq \frac{3n}{n+2}.$

Для понимания этих равенств используется всюду плотность пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha+\beta}(\Omega)$ в пространстве $\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega), \alpha \geq 0, \beta \geq 1,$ (см. [6,8]) а следовательно, всюду плотность $V_{\alpha+\beta}(\Omega)$ в $\widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 1$, ,т. е. пространство $\widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$ можно рассмотреть как замыкание пространства $V_{\alpha+\beta}(\Omega)$ в метрике пространства $\left(\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \right)^n$, n≥ 1, где , $\alpha \geq 0, \beta \geq 1,$ - некоторые числа.

Теперь, используя введенные пространства определим пространства функций $u: Q \to \Re$,

$$\overset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,p,q}(Q) = L_p\left(0,T; \widetilde{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)\right) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1\left(0,T; V_q^*(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(0,T; (L_2(\Omega))^n\right), \quad (7)$$

здесь $\overset{\circ}{W}{}^1_q\left(0,T;V_q^*(\Omega)\right) \equiv W_q^1\left(0,T;V_q^*(\Omega)\right) \cap \left\{u(x,t) \middle| u(x,0)=0\right\}$, $p=\alpha+\beta$.

Введенные пространства и вышеприведенные рассуждения позволяют определить решение задачи (1)-(3) и сформулировать теорему существования для этой задачи .

Определение 1. *Пара функций* $\left(u(x,t),p(x,t)\right) \in \overset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,p,q}(Q) \times L_q(Q)$ *называется решением задачи (1)-(3) , если она удовлетворяет уравнению (1) в смысле пространства* $L_q\left(0,T;V_q^*(\Omega)\right)$ *, т. е. для любого* $v(x,t) \in L_p\left(0,T;V_p(\Omega)\right)$ *выполняется равенство*

$$\int_Q \frac{\partial u_j}{\partial t} v_j dtdx + \int_Q \sum_{i=1}^n \left[\mu |u_j|^{p-2} D_i u_j - u_i u_j\right] D_i v_j dxdt = \int_Q h_j v_j dxdt, \quad j=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Замечание 1. Как видно из определения решения, вектор функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,p,q}(Q)$ является соленоидальным решением задачи (1)-(3), при этом [в силу факторизованности задачи по определению (по теореме разложения Ходжа [9], аналогично тому как это обьяснено в [1])], скалярная функция $p(x,t)$ может быть произвольной функцией из $L_q(Q)$.

Для рассмотренной задачи справедлива следующая теорема существования.

Теорема 1. *Пусть* $p \geq \max\left\{2, 3-\frac{3}{n}\right\}, \mu > 0$ *некоторые числа. Тогда для любого* $h(x,t) \in L_q\left(0,T;V_q^*(\Omega)\right)$ *задача (1)-(3) разрешима в* $\overset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,p,q}(Q)$, *при этом* $p(x,t) \in L_q(Q)$ *- некоторая функция.*

Доказательство теоремы следует из приведенной ниже общей теоремы.

2. Общая теорема разрешимости.

Пусть X, Y - банаховы пространства с сопряженными X^*, Y^* , соответственно; $S \subseteq X$ - слабо полное «рефлексивное» *pn*-пространство,

$$A: L_p(0,T;S) \to L_q(0,T;Y), (p,q>1)$$

некоторое, вообще говоря, нелинейное отображение.

Заметим, что относительно свойств *pn*-пространств можно обратиться к работам [6,8] и др.. В частности , из «рефлексивности» *pn*- пространства S следует, что каждое ограниченное в S множество слабо компактно в S , т. е. из каждой последовательности, содержащейся в этом множестве можно выбрать слабо сходящуюся в S подпоследовательность.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$x'(t) + A(t,x(t)) \equiv \frac{dx}{dt} + A(t,x) = y(t), x(0)=0, \quad (9)$$

и введем пространство : $\overset{\circ}{P}_{pq}(0,T;S,Y) \equiv L_p(0,T;S) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_q(0,T;Y)$.

Определение 2. Вектор функция $x(t) \in \overset{\circ}{P}_{pq}\left(0,T;S,Y\right)$ называется решением задачи (9), если она удовлетворяет уравнению из (9) в смысле пространства $L_q\left(0,T;Y\right)$, т.е. для любого $y^*(t)$ из пространства $L_{q'}\left(0,T;Y^*\right), q' = \dfrac{q}{q-1}$ имеет место равенство

$$\int_0^T < x', y^* > dt + \int_0^T < A(t,x), y^* > dt = \int_0^T < y, y^* > dt.$$

Рассмотрим следующие условия:

1) оператор $A: \overset{\circ}{P}_{pq}(0,T,S,Y) \to L_q(0,T,)$ – слабо компактен (слабо непрерывен), т.е. если последовательность $\{x_m(t)\} \subset \overset{\circ}{P}_{pq}(0,T;S,Y)$ слабо сходится в $\overset{\circ}{P}_{pq}(0,T;S,Y)$ к $x(t)$ из $\overset{\circ}{P}_{pq}(0,T;S,Y)$, то из $\{x_m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_k\}$ такую, что $A(t,x_k) \to A(t,x)$ слабо в $L_q(0,T;Y)$ при $k\to\infty$;

2) $L: X_0 \to Y^{**}$ – линейный непрерывный оператор с сопряженным L^*, причем L: $W_p^s(0,T;X_0) \to W_p^s(0,T;Y^*)$, $s \geq 0$ и коммутирует с d/dt, кроме того, $\ker L^* = \{0\}$ и X_0 - сепарабельное векторное топологическое пространство, $X_0 \subseteq S$;

3) операторы A и L образуют в обобщенном смысле коэрцитивную пару на пространтсве $L_p(0,T;X_0)$, т. е. существуют некоторое число $r>0$ и функция $\varphi: R_+^1 \to R_+^1$ такие, что $\varphi(\tau)/\tau \to +\infty$ при $\tau\to+\infty$ и для любого $x(t) \in L_p(0,T;X_0)$ при $[x]_{L_p(S)} \geq r$ справедливо неравенство

$$\int_0^T < A(t,x), Lx > dt \geq \varphi\left([x]_{L_p(S)}\right) - C,\ C > 0 - const, (p = \max\{p,q\});$$

4) существуют постоянные $C_0>0$, $C_1 \geq 0, \nu > 1$ такие, что для любых $x(t) \in W_p^1(0,T;X_0)$ и $\xi(t) \in L_p(0,T;X_0)$ имеют место

$$\int_0^T < \xi, L\xi > dt \geq C_0 \|\xi\|_{L_\nu(Y)}^\nu, \quad \int_0^T < x', Lx > dt \geq C_1.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1-4. Тогда для любого $y(t) \in L_q(0,T;Y)$, удовлетворяющего неравенству*

$$\sup\left\{ \frac{\int_0^T < y, Lx > dx}{[x]_{L_p(s)}} \,\Big|\, x \in L_p(0,T;X_0) \right\} < +\infty$$

задача Коши (9) разрешима в пространстве $\overset{\circ}{P}_{pq}(0,T;S,Y)$.

Доказательство проводится методом Галеркина с использованием метода эллиптической регуляризации , (см. работу [6] или [8]).

3.Некоторые теоремы вложения для *pn*- пространств.

Для того, чтобы применить теорему 2 к поставленной задаче необходимо доказать некоторые теоремы вложения для введенных пространств.

Пусть $S_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$ - пространство, с p - нормой определеной в виде

$$[u]_{S_{\alpha\beta}^1} \equiv \|g(u)\|_{W_\beta^1} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |u|^\alpha |D_i u|^\beta dx \right)^{1/\beta} + \|u\|_{L_{\alpha+\beta}(\Omega)}.$$

Лемма1. *$S_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$ является слабо полным пространством.*

Теорема 3. *Пусть $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ - некоторые числа. Тогда вложение $S_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \subset L_{\alpha+\beta}(\Omega)$ – компактное.*

Для доказательства см. [6] (см. также [8]).

Теорема 4. *Пусть числа $\alpha \geq 0, \beta \geq 1$. Тогда включение*

$$P_{\rho\beta}\left(0,T;\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega),W_{\beta}^{-1}(\Omega)\right) \subset L_{\rho}\left(0,T;L_{\rho}(\Omega)\right) - \quad \textit{компактное.}$$

Для доказательства см. [6] (см. также [8]).

Лемма 2. *Пусть числа $\alpha \geq 0, \beta \geq 1$. Тогда справедливо включение*

$$L_p\left(0,T;\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)\right) \bigcap L^{\infty}\left(0,T;L_2(\Omega)\right) \subset L_{p_1}\left(0,T;L_{p_1}(\Omega)\right),\ p_1 < \frac{np}{n-\beta}, p = \alpha + \beta.$$

Доказательство. Имеем

$$u \in \overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \Rightarrow g(u) \in \overset{\circ}{W}{}_{\beta}^{1}(\Omega), \text{ при } g(u) \equiv |u|^{\rho} u, \quad \rho = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Теперь , используя теорему вложения для пространств Соболева из [7] получаем, что $|u|^{\rho} u \in L_{\beta^*}(\Omega), \dfrac{n\beta}{n-\beta} > \beta_i^* \geq 1.$ Отсюда, в частности получаем, что

$$u \in L^{\infty}(0,T;L_2(\Omega)) \bigcap L_p(0,T;L_p(\Omega)).$$

Следовательно, $u \in L_{p_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$, , что и требовалось доказать.

Из леммы 2 непосредственно вытекает справедливость следующего следствия.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда при $p \geq \max\left\{2, 3-\dfrac{3}{n}\right\}$ справедливо включение :*

$$L_p\left(0,T;\overset{\circ}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega)\right) \bigcap L^{\infty}(0,T;L_2(\Omega)) \subset L_{p^*}(Q), p^* = \frac{np}{n-p}.$$

4. Доказательство теоремы 1.

Как уже было сказано выше, для доказательства будем использовать теорему 2, т.е. покажем, что в условиях теоремы 1 все условия теоремы 2 выполняются . Выберем соответствующие пространства и операторы следующим образом:

$$X \equiv L_p(\Omega), Y \equiv V_q^*(\Omega), S \equiv \widetilde{S}_{1,pq,q}(Q), X \equiv V_p(\Omega)$$

$$A(u) \equiv -\mu \sum_{i=1}^{n} D_i\left(|u|^{p-2} D_i u\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u.$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда оператор A, порожденный задачей (1)-(3), является слабо непрерывным из $\underset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,pq,q}(Q) \bigcap L^{\infty}(0,T;L_2(\Omega))$ в $L_q(0,T;V_q^*(\Omega))$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{u^m\} \subset \underset{\circ}{\widetilde{P}}_{1pq,q}(Q) \bigcap \bigcap L^{\infty}(0,T;L_2(Q))$ ограниченная и слабо сходится в $\underset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,pq,q}(Q)$ к $u(t,x) \in \underset{\circ}{\widetilde{P}}_{1,pq,q}(Q)$, т. е. $u^m(x,t) \to u(x,t)$ слабо в $\underset{\circ}{\widetilde{P}}{}^{1}_{1,pq,q}(Q)$. А это означает, что $\left|u_i^m\right|^{\rho} u_i^m \to \left|u_i\right|^{\rho} u_i$

слабо в $L_q(0,T;W_q^1(\Omega))$, в силу теоремы 4. Тогда получаем справедливость соотношений: $|u_j^m|^{p-2} D_i u_j^m \to |u_j|^{p-2} D_i u_j$ слабо в $L_q(0,T;L_q(\Omega))$, $i,j=\overline{1,n}$, $u_j^m \Rightarrow u_j \in L_p(0,T;L_p(\Omega))$ сильно в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$ и п. в. в Q ,так как в условиях теоремы 1, используя обычную процедуру доказательства слабой сходимости (см.[5,6]) получаем справедливость первого соотношения , приведенного выше, а второе - очевидно. Отсюда вытекает, что первое слагаемое в определении оператора A удовлетворяет утверждению леммы 3.

Для второго слагаемого из определения оператора A имеем :

$$< \sum_{i=1}^n u_i^m D_i u^m, v > = < \sum_{i=1}^n D_i \left(u_i^m u^m\right), v > = -\sum_{i=1}^n < u_i^m u^m, D_i v >,$$

для любого $v(x,t) \in L_p(0,T;V_p(Q)), p \ge 3 - \frac{3}{n}$. Используя здесь лемму 2 и следствие 2 получаем, что если при $p \ge \max\{2, 3-3/n\}$, ограниченная в

$$\tilde{P}_{\circ\, 1pq,q}(Q) \cap L^\infty(0,T;L_2(Q))$$

последовательность $\{u^m\}$ слабо сходится в $\tilde{P}^{1}_{01,pq,q}(Q)$,, то имеет место соотношение:

$$\sum_{i=1}^n u_i^m D_i u^m \to \sum_{i=1}^n u_i D_i u \quad \text{слабо в} \quad L_q(0,T;V_q^*(\Omega)).$$

Тем самым получаем справедливость утверждении леммы 3.

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 для задачи (1)-(3) условия 3 и 4 теоремы 2 выполняются в пространствах, определенных выше .*

Доказательство. Действительно для любого $u(x,t) \in L_p(0,T;V_p(\Omega))$ имеет место

$$\int_0^t \langle A(u), u \rangle d\tau = \sum_{i=1}^n \mu \int_0^t \int_\Omega |u|^{p-2} |D_i u|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i(u_i u) u dx d\tau =$$
$$= \mu \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega |u|^{p-2} |D_i u|^2 dx d\tau,$$

откуда следует, что оператор A удовлетворяет условию 3 теоремы 2 , с единичным оператором .

Далее, для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(0,T;L_p(\Omega))$ имеем :

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \|u'\|^2_{L_2(Q)},$$
$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \tau} u dx d\tau = \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx \Big|_0^t = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}(t),$$

что показывает выполнение условия 4 теоремы 2.

Таким образом , из лемм 3 и 4 получаем , что в условиях теоремы 1 для задачи (1)-(3) выполняются все условия теоремы 2. Тогда применяя теорему 2 к задаче (1)-(3) получаем справедливость теоремы 1. Тем самым существование решений задачи (1)-(3) доказано.

5.Единственность решения задачи (1)-(3).

Теперь рассмотрим вопрос о единственности решения задачи.

Теорема 5. *Пусть $p\ge 4$ тогда решение задачи (1)-(3)-единственно.*

Доказательство. Будем исходить от обратного . А именно, пусть задача имеет два различных решения: $u(x,t)$ и $v(x,t)$ (в смысле определения 1), а разность этих решений обозначим через $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$.

Рассматривая разность уравнений для различных решений $u(x,t)$ и $v(x,t)$ для $w(x,t)$ получаем следующее функциональное уравнение

$$<\frac{\partial w}{\partial t}-\mu\sum_{i=1}^{n}D_i\left(|u|^{p-2}D_iu-|v|^{p-2}D_iv\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(u_iD_iu-v_iD_iv\right),\zeta>=0, \tag{10}$$

здесь $\zeta(x,t)\in L_p\left(0,T;V_p(\Omega)\right)$ - произвольное , а $<.,.>$ - интеграл по x .

Обозначим через L обратный оператор к оператору, порожденному задачей $\{-\Delta u=f,\quad u\mid_{\partial\Omega}=0\}$.Тогда, считая $\zeta(x,t)$ решением этой задачи с правой частью $w(x,t)$ (т.е. $L\,w(x,t)=\zeta(x,t)$) и учитывая это в уравнении (10) получим

$$<\frac{\partial w}{\partial t},Lw>-\mu<\sum_{i=1}^{n}D_i\left(|u|^{p-2}D_iu-|v|^{p-2}D_iv\right),Lw>+$$
$$+<\sum_{i=1}^{n}\left(u_iD_iu-v_iD_iv\right),Lw>=0\ , \tag{11}$$

отсюда вытекает, что имеет место равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\mu}{p-1}<\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right),w>=\sum_{i=1}^{n}<\left(uu_i-vv_i\right),D_iLw>,$$

из которого получаем следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\mu}{p-1}<\left(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v\right),w>=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2}+\mu<|\bar{u}|^{p-2}w,w>\le C(\varepsilon)\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2}+\varepsilon<\left(u^2+v^2\right)w,w>, \tag{12}$$

где $\bar{u}(x,t)\in L_p\left(0,T;V_p(\Omega)\right)$ и содержится в интервале [u,v]. А точнее, суммируя полученные функциональные уравнения, затем оценивая для основного слагаемого получим:

$$\left|\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_iu_j-v_iv_j\right)D_iLw_idx\right|\le\int_\Omega\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_iu_j-v_iv_j\right)D_iLw_i\right|dx\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_iu_j-v_iv_j\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla Lw_i\right)^2dx.$$

Оценим первый интеграл в правой части. Имеем:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left(u_iu_j-v_iv_j\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left(u_iw_j+w_iv_j\right)^2\le\sum_{i,j}^{n}\left(u_i^2w_j^2+w_i^2v_j^2\right)=$$
$$=\sum_{i,j}^{n}\left(u_i^2+v_i^2\right)w_j^2.$$

Следовательно, учитывая это неравенство, вместо неравенства (12) получим, что справедливо следующее расширенное неравенство:

5.Единственность решения задачи (1)-(3).

Теперь рассмотрим вопрос о единственности решения задачи.

Теорема 5. *Пусть $p\geq 4$ тогда решение задачи (1)-(3)-единственно.*

Доказательство. Будем исходить от обратного . А именно, пусть задача имеет два различных решения: $u(x,t)$ и $v(x,t)$ (в смысле определения 1), а разность этих решений обозначим через $w(x,t)= u(x,t) - v(x,t)$.

Рассматривая разность уравнений для различных решений $u(x,t)$ и $v(x,t)$ для $w(x,t)$ получаем следующее функциональное уравнение

$$< \frac{\partial w}{\partial t} - \mu \sum_{i=1}^{n} D_i\left(|u|^{p-2} D_i u - |v|^{p-2} D_i v\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(u_i D_i u - v_i D_i v\right), \zeta >= 0, \tag{10}$$

здесь $\zeta(x,t) \in L_p\left(0,T;V_p(\Omega)\right)$ - произвольное , а $<.,.>$ - интеграл по x .

Обозначим через L обратный оператор к оператору, порожденному задачей $\{-\Delta u=f,\quad u\,|_{\partial\Omega}=0\}$.Тогда, считая $\zeta(x,t)$ решением этой задачи с правой частью $w(x,t)$ (т.е. $L\,w(x,t)= \zeta(x,t)$) и учитывая это в уравнении (10) получим

$$\begin{gathered} < \frac{\partial w}{\partial t}, Lw > - \mu < \sum_{i=1}^{n} D_i\left(|u|^{p-2} D_i u - |v|^{p-2} D_i v\right), Lw > + \\ + < \sum_{i=1}^{n}\left(u_i D_i u - v_i D_i v\right), Lw >= 0\ , \end{gathered} \tag{11}$$

отсюда вытекает, что имеет место равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2} w\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\mu}{p-1} < \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right), w >= \sum_{i=1}^{n} < \left(u u_i - v v_i\right), D_i L w >,$$

из которого получаем следующее неравенство

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2} w\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\mu}{p-1} < \left(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v\right), w >= \\ = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|L^{1/2} w\right\|^2_{L_2} + \mu < |\bar{u}|^{p-2} w, w > \leq C(\varepsilon)\left\|L^{1/2} w\right\|^2_{L_2} + \varepsilon < \left(u^2 + v^2\right) w, w >, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\bar{u}(x,t) \in L_p\left(0,T;V_p(\Omega)\right)$ и содержится в интервале [u,v]. А точнее, суммируя полученные функциональные уравнения, затем оценивая для основного слагаемого получим:

$$\begin{gathered} \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n}\left(u_i u_j - v_i v_j\right) D_i L w_i dx\right| \leq \int_\Omega \left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_i u_j - v_i v_j\right) D_i L w_i\right| dx \leq \\ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n}\left(u_i u_j - v_i v_j\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla L w_i\right)^2 dx. \end{gathered}$$

Оценим первый интеграл в правой части. Имеем:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left(u_i u_j - v_i v_j\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left(u_i w_j + w_i v_j\right)^2 \leq \sum_{i,j}^{n}\left(u_i^2 w_j^2 + w_i^2 v_j^2\right) = \\ = \sum_{i,j}^{n}\left(u_i^2 + v_i^2\right) w_j^2 . \end{gathered}$$

Следовательно, учитывая это неравенство, вместо неравенства (12) получим, что справедливо следующее расширенное неравенство:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|L^{1/2}w_i\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t)+\mu\sum_{j=1}^{n}\int_0^t<\left|\tilde{u}_i\right|^{p-2}w_i,w_i>d\tau\le$$
$$\le C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\left\|L^{1/2}w_i\right\|^2_{L_2(\Omega)}d\tau+\varepsilon\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t<\left(u_j^2+v_j^2\right)w_i,w_i>d\tau, \tag{13}$$

где $\tilde{u}(x,t)\in L_p(0,T;V_p(\Omega))$ и содержится в интервале [u,v].

Теперь, для завершения доказательства теоремы 5 остается использовать следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $u(x,t),v(x,t)\in L_p(Q)$ *− некоторые функции ,* $p\ge 4$ *, а*

$$w(x,t)\equiv u(x,t)-v(x,t)\ne 0,\quad (x,t)\in Q\equiv\Omega\times(0,T).$$

Тогда найдется число $\varepsilon>0$: $\varepsilon\equiv\varepsilon(u,v,p,\text{mes}\,Q)>0$ *такое, что справедливо неравенств*

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{Q_t}\left|\bar{u}_i\right|^{p-2}w_i^2dxd\tau-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_t}\left|u_j\right|^2w_i^2dxd\tau\right\}\ge 0,\ \text{для п.в. } t\in(0,T) \tag{14}$$

где $\bar{u}(x,t)\in L_p(Q)$ *такая функция (для каждого i=1,2,...,n) , что* $\tilde{u}\in[u,v]$ *и удовлетворяет равенству* $|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v=(p-1)|\bar{u}|^{p-2}(u-v)$.

Используя лемму 5, т.е. неравенство (14) в неравенстве (13) получим

$$\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2(\Omega)}(t)\le C(\varepsilon)\left\|L^{1/2}w\right\|^2_{L_2(Q_t)},\quad C(\varepsilon):\ 0<C(\varepsilon)<+\infty.$$

Применяя неравенство Гронуолла, из последнего неравенства получаем, что $\left\|L^{1/2}w_i\right\|_{L_2}=0$, а это показывает справедливость теоремы 5. Следовательно, для окончательного завершения доказательства теоремы 5 остается привести доказательство леммы 5.

Вначале докажем справедливость следующего утверждения.

Лемма 6 . *Пусть* $\rho\ge 2-$ *некоторое число , а* f *- функция , определенная в виде :* $f(\xi)=|\xi|^\rho\xi$ *для* $\xi\in R^l$ *. Тогда , если* $\tilde{\xi}\in R^l$ *из интервала* $[\eta,\xi]$ *такое, что* $\left|\tilde{\xi}\right|^\rho(\xi-\eta)=\dfrac{1}{\rho+1}\left[|\xi|^\rho\xi-|\eta|^\rho\eta\right]$*, при заданных* $\xi,\eta\in R^l$*, то для* $\tilde{\xi}$ *имеет место неравенство:* $\left|\tilde{\xi}\right|\ge\dfrac{2}{5}\max\{|\xi|,|\eta|\}$.

Доказательство. Отдельно рассмотрим всевозможные случаи. Справедливость леммы в случае $\eta\cdot\xi>0$ и $\min\{|\xi|,|\eta|\}\ge(2/5)\max\{|\xi|,|\eta|\}$ вытекает из того факта что удовлетворяющее требуемому равенству $\tilde{\xi}\in R^1$ содержится в интервале $[|\eta|,|\xi|]\subset R^1$, (предполагаем, что $\max\{|\eta|,|\xi|\}=|\xi|$).

Рассмотрим случай : $\eta\cdot\xi>0$ при $|\eta|<2/5|\xi|$, тогда в условиях леммы достаточно рассмотреть $\xi>0$, $\eta>0$, т. к. случай $\xi<0$, $\eta<0$ доказывается аналогично. Итак, для доказательства будем исходить от обратного, т .е. предположим, что $\left|\tilde{\xi}\right|<\dfrac{2}{5}\max\{|\xi|,|\eta|\}=\dfrac{2}{5}|\xi|$ и оценим отдельно левую и правую часть требуемого неравенства из леммы.

Для правой части имеем: $|\xi|^{\rho}\xi-|\eta|^{\rho}\eta\geq\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho+1}\right]|\xi|^{\rho}\xi,$, а для левой части имеем: $\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\xi-\eta)<\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}|\xi|^{\rho}(\xi-\eta)<\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}|\xi|^{\rho}\xi,$, а это противоречит условиям леммы, т.к. такое число $\tilde{\xi}\in R^{1}$ не может удовлетворять равенству из леммы. Полученное противоречие и показывает справедливость леммы в этом случае.

Теперь, пусть $\eta\xi\leq 0$ и $\max\{|\eta|,|\xi|\}=|\xi|$, тогда нетрудно убедиться, что по условию леммы, число $\tilde{\xi}\in R^{1}$ должно удовлетворять равенству

$$(\rho+1)\tilde{\xi}^{\rho}(\eta+\xi)=\xi^{\rho}+\eta^{\rho}.$$

При $\rho\geq 3$ снова исходя от обратного имеем: если $\left|\tilde{\xi}\right|<\frac{2}{5}|\xi|$, то $\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\xi+\eta)\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho}2\xi,(\xi\geq 0)$ (не умаляя общности можно считать, что $\xi\geq 0$), а с другой стороны: $\xi^{\rho+1}+|\eta|^{\rho+1}\geq\xi^{\rho+1}$.

Отсюда, поскольку $2^{\rho-1}\geq\rho+1$, при $\rho\geq 3$ и $(4/5)^{\rho-1}<1$ получаем противоречие с условиями леммы, что показывает справедливость леммы в этом случае.

Далее, рассмотрим случай $2\leq\rho<3$ и вышеприведенные рассуждения проведем для этого случая, при этом отдельно рассмотрим случаи: когда $|\eta|\leq 1/2\xi$ и когда $\xi\geq|\eta|>(1/2)\xi$. Пусть $|\eta|\leq 1/2$. Тогда оценивая отдельно левую и правую части равенства из леммы, имеем: $\xi^{\rho+1}+\eta^{\rho+1}\geq\xi^{\rho+1}$, а для левой части-

$$(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\eta+\xi)\leq\frac{3}{2}(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}\xi\leq\frac{3}{2}(\rho+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho+1}\leq\frac{3}{2}4\frac{4}{25}\xi^{\rho+1}.$$

Полученное противоречие показывает справедливость утверждение леммы так же в этом случае. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\xi\geq|\eta|>(1/2)\xi,$. Имеем: для правой части: $\xi^{\rho+1}+\eta^{\rho+1}\geq(1-2^{-\rho-1})\xi^{\rho+1}$; для левой части (в предложении, что исходим от обратного):

$$(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\eta+\xi)\leq 2(\rho+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho+1}\leq 2^{\rho+1}5^{-\rho}(3+x)\xi^{\rho+1},$$

где $\rho+1=3+x, 0<x<1-$некоторое число. Тогда , для разности левой и правой части получаем следующий коэффициент

$$1+2^{-3-x}-2(3+x)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}=1+2^{-3-x}-6\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}=$$

$$=2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-6\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]\geq 2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-6\cdot 2^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]=,$$

$$=2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-\frac{6\cdot 4}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]>2^{-3-x}$$

Для правой части имеем: $|\xi|^{\rho}\xi-|\eta|^{\rho}\eta>\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho+1}\right]|\xi|^{\rho}\xi,$, а для левой части имеем: $\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\xi-\eta)<\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}|\xi|^{\rho}(\xi-\eta)<\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}|\xi|^{\rho}\xi,$, а это противоречит условиям леммы, т.к. такое число $\tilde{\xi}\in R^1$ не может удовлетворять равенству из леммы. Полученное противоречие и показывает справедливость леммы в этом случае.

Теперь, пусть $\eta\xi\le 0$ и $\max\{|\eta|,|\xi|\}=|\xi|$, тогда нетрудно убедиться, что по условию леммы, число $\tilde{\xi}\in R^1$ должно удовлетворять равенству

$$(\rho+1)\tilde{\xi}^{\rho}(\eta+\xi)=\xi^{\rho}+\eta^{\rho}.$$

При $\rho\ge 3$ снова исходя от обратного имеем: если $\left|\tilde{\xi}\right|<\frac{2}{5}|\xi|$, то $\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\xi+\eta)\le\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho}2\xi,(\xi\ge 0)$ (не умаляя общности можно считать, что $\xi\ge 0$), а с другой стороны: $\xi^{\rho+1}+|\eta|^{\rho+1}\ge\xi^{\rho+1}$.

Отсюда, поскольку $2^{\rho-1}\ge\rho+1$, при $\rho\ge 3$ и $(4/5)^{\rho-1}<1$ получаем противоречие с условиями леммы, что показывает справедливость леммы в этом случае.

Далее, рассмотрим случай $2\le\rho<3$ и вышеприведенные рассуждения проведем для этого случая, при этом отдельно рассмотрим случаи: когда $|\eta|\le 1/2\xi$ и когда $\xi\ge|\eta|>(1/2)\xi$. Пусть $|\eta|\le 1/2$. Тогда оценивая отдельно левую и правую части равенства из леммы, имеем: $\xi^{\rho+1}+\eta^{\rho+1}\ge\xi^{\rho+1}$, а для левой части-

$$(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\eta+\xi)\le\frac{3}{2}(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}\xi\le\frac{3}{2}(\rho+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho+1}\le\frac{3}{2}4\frac{4}{25}\xi^{\rho+1}$$

Полученное противоречие показывает справедливость утверждение леммы так же в этом случае. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\xi\ge|\eta|>(1/2)\xi,$. Имеем: для правой части: $\xi^{\rho+1}+\eta^{\rho+1}\ge(1-2^{-\rho-1})\xi^{\rho+1}$; для левой части (в предложении, что исходим от обратного):

$$(\rho+1)\left|\tilde{\xi}\right|^{\rho}(\eta+\xi)\le 2(\rho+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\rho}\xi^{\rho+1}\le 2^{\rho+1}5^{-\rho}(3+x)\xi^{\rho+1},$$

где $\rho+1=3+x, 0<x<1-$некоторое число. Тогда , для разности левой и правой части получаем следующий коэффициент

$$1+2^{-3-x}-2(3+x)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}=1+2^{-3-x}-6\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}=$$

$$=2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-6\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]\ge 2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-6\cdot 2^{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]=,$$

$$=2^{-3-x}\left[1+2^{3+x}-\frac{6\cdot 4}{25}\left(\frac{4}{5}\right)^{2+x}2^{3+x}\right]>2^{-3-x}$$

так, как $2^x > (1 + x/3)$. Тем самым снова получаем неравенство противоречащее условиям леммы. Другими словами, получаем справедливость леммы так же в этом случае.

Таким образом, лемма 6 полностью доказана.

Доказательство леммы 5. Введем обозначения:

$$|\widetilde{u}_i(x,t)| = \sup\left\{|u_i|, |v_i| \,\middle|\, i = \overline{1,n}\right\}.$$

Тогда используя лемму 6 получаем, что если функция $\widetilde{u}_i$ такая, что выполняется равенство:

$$|u_i|^{p-2} u_i - |v_i|^{p-2} v_i = (p-1)|\overline{u}_i|^{p-2} w_i, \text{ то } |\overline{u}_i| \geq \frac{2}{5}|\widetilde{u}_i|.$$

Теперь покажем, что существует число $\varepsilon > 0$ независящее от $w_i(x,t)$ и такое, что справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_t} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^{p-2} (p-1)|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \left(u_j^2 + v_j^2\right) \right] w_i^2 dx d\tau \geq 0, \quad Q_t \equiv \Omega \times (0,t).$$

Так как по предположению существуют два различных решения рассмотренной задачи, то не умаляя общности можно считать, что справедливо соотношение $w_i(x,t) \neq 0$, $\forall (x,t) \in Q / E$, $mesE = 0$, т.е. можно считать, что разность этих решений отлично от нуля почти всюду в рассматриваемой области. Поскольку в случае, когда $w_i(x,t)$ отлична от нуля на некоторой подобласти ненулевой меры, доказательство леммы проводится аналогично, рассмотрим только указанный случай.

Итак предположим, что на заданной области выполняются соотношения.

$$w_i(x,t) \neq 0, \quad u_i(x,t), \quad v_i(x,t), \quad w_i(x,t) \in L_p(Q), \quad p \geq 4, \text{ и}$$

$$\int_Q |w_i(x,t)|^p dx dt = C_i > 0, \int_Q |w_i(x,t)|^2 dx dt = \overline{C}_i > 0. \tag{15}$$

Таким образом получаем, что в этих предположениях достаточно показать существование числа $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_t} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau \geq 0. \tag{16}$$

Введем следующие множества:

$$\forall \delta_0 > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad Q \equiv Q_\delta^i \cup Q_1^i \cup Q_0^i,$$

где $mesQ_0^i \equiv mes\left\{x \in Q \,\middle|\, |\widetilde{u}_i| < \delta\right\} \leq \delta_0, \quad mesQ_\delta^i \equiv mes\left\{x \in Q \,\middle|\, |\widetilde{u}_i| < \delta^{-1}\right\},$

$$\bigcup_{i=1}^{n} Q_\delta^i \equiv Q_\delta, \quad mes\widetilde{Q}_0^i \equiv mes\left\{x \in Q \,\middle|\, |w_i| < \delta\right\} \leq \delta_0, \quad Q_1^i \equiv Q \setminus \left(Q_\delta^i \cup Q_0^i\right),$$

$$\int_{Q_\delta^i} |\widetilde{u}_i|^p dx d\tau \leq \delta_0, mesQ_1^i \geq mesQ - 2\delta_0,$$

$$Q_2^i \equiv \left\{x \in Q \,\middle|\, \sup\left\{|\widetilde{u}_k| \,\middle|\, k = \overline{1,n}\right\} = |\widetilde{u}_i|\right\}, \quad Q \equiv \bigcup Q_2^i.$$

Заметим, что из абсолютной непрерывности интеграла вытекает, что

$$\delta_0 \geq \int_{Q_\delta^i} |\widetilde{u}_i|^p dx d\tau > \delta^{-p} mesQ_\delta^i \Rightarrow \delta^p \delta_0 > mesQ_\delta^i, \exists m > 0, \quad \delta_0^m \geq \delta.$$

Ясно, что все приведенные неравенства остаются в силе для подмножеств из подобласти $Q_t \equiv \Omega \times (0,t)$, определенных таким же образом.

Тогда, оценивая снизу левую часть неравенства (14) получим

$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_t} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{Q_{t1}^i \setminus (Q_{t2}^i \cup Q_{t\delta})} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau + \right.$$

$$+ \int_{Q_{t2}^i \setminus Q_{t0}^i} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau + \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t0}^i \cap Q_{t3}^k} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{n} \int_{Q_{t1}^l \cap Q_{t\delta}^k \cap Q_{t2}^i} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \widetilde{u}_j^2 \right] w_i^2 dx d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{Q_{t1}^i \setminus (Q_{t2}^i \cup Q_{t\delta})} \left[\delta^p - \varepsilon n \right] \delta^{-2} w_i^2 dx d\tau + \int_{Q_{t2}^i \setminus Q_{t0}^i} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right] \widetilde{u}_i^2 w_i^2 dx d\tau + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t0}^i \cap Q_{t3}^k} \left[|\widetilde{u}_i|^{p-2} - \varepsilon n \widetilde{u}_k^2 \right] w_i^2 dx d\tau + \sum_{l,k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^l \cap Q_{t3}^i \cap Q_{t\delta}^k} \left[\delta^{p-2} - \varepsilon n \widetilde{u}_l^2 \right] w_i^2 dx d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t1}^k} \left[\delta^{p-2} - \varepsilon n \right] \delta^{-2} dx d\tau + \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t\delta}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t3}^k} \left[\delta^{-p+4} - \varepsilon n \widetilde{u}_k^2 \right] w_i^2 dx d\tau +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t0}^k} \left[\delta^{-p+2} - \varepsilon n \delta^2 \right] dx d\tau \right\}.$$

Отсюда при условии $\varepsilon n \leq \delta^p$ получим справедливость следующей последовательности неравенств

$$I \geq \sum_{n=1}^{n} \left\{ \int_{Q_{t1}^i \setminus (Q_{t2}^i \cup Q_{t\delta} \cup \widetilde{Q}_{t0}^i)} \left(\delta^p - \varepsilon n \right) \delta^{-2} \delta^2 dx d\tau + \int_{Q_{t2}^i \setminus (Q_{t0}^i \cup \widetilde{Q}_{t0}^i)} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 dx d\tau - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t0}^i \cap Q_{t2}^k} 4 \varepsilon n |\widetilde{u}_k|^2 \delta^2 dx d\tau + \sum_{l,k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^i \cap Q_{t\delta}^k \cap Q_{t2}^l \cap \widetilde{Q}_{t1}^i} \left(\delta^{p-2} - \varepsilon n \delta^{-2} \right) w_i^2 dx d\tau$$

$$+ \sum_{l,k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^i \cap Q_{t\delta}^k \cap Q_{t2}^l \cap Q_{t\delta}^i} \left(\delta^{p-2} - \varepsilon n |\widetilde{u}_l|^2 \right) w_i^2 dx d\tau + \sum_{l,k=1}^{n} \int_{Q_{t1}^i \cap Q_{t\delta}^k \cap Q_{t2}^l \cap Q_{t\delta}^i} \left(\delta^{p-4} - \varepsilon n \right) \delta^2 w_i^2 dx d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t\delta}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t1}^k} \left(\delta^{-p+4} - \varepsilon n \right) \delta^2 w_i^2 dx d\tau + \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t\delta}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t\delta}^k} \left(\delta^{-p+2} - \varepsilon n |\widetilde{u}_l|^2 \right) w_i^2 dx d\tau +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \int_{Q_{t\delta}^i \cap Q_{t2}^k \cap Q_{t0}^k} \left(\delta^{-p} - \varepsilon n \right) \delta^2 w_i^2 dx d\tau \right\}.$$

так как

$$\int_{Q_{t2}^i \cap \widetilde{Q}_{t0}^i} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau = \int_{(Q_{t2}^i \cap \widetilde{Q}_{t0}^i) \setminus Q_{t3}^i} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau +$$

$$+ \int_{Q_{t2}^i \cap Q_{t3}^i} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau \geq \int_{(Q_{t2}^i \cap \widetilde{Q}_{t0}^i) \setminus Q_{t3}^i} \left(\left(\frac{\delta}{2} \right)^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau +$$

$$+ \int_{Q_{t2}^i \cap Q_{t3}^i} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau \geq \int_{Q_{t2}^i \cap Q_{t3}^i} \left(|\widetilde{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n \right) |\widetilde{u}_i|^2 w_i^2 dx d\tau,$$

где

$$Q_3^i \equiv \left\{ x \in Q \left| |\tilde{u}_i| \le \frac{\delta}{2} \right.\right\} \subset Q_0^i \cap \tilde{Q}_0^i,$$ а $0 < \delta << 1$ достаточно малое

Некоторые слагаемые из правой части этого неравенства можно оценить снизу уже при условии на $\varepsilon > 0$: а именно, справедливы соотношения:

$$\mathrm{I} \ge \sum_{n=1}^{n} \left\{ \left(\delta^p - \varepsilon n\right) mes\left(Q_{i1}^i \setminus \left(Q_{i2}^i \cup Q_{i8} \cup \tilde{Q}_{i0}^i\right)\right) + \int\limits_{Q_{i2}^i \setminus \left(Q_{i0}^i \cup \tilde{Q}_{i0}\right)} \left(|\overline{u}_i|^{p-4} - \varepsilon n\right)|\overline{u}_i|^2 \delta^2 dxd\tau - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \left[\int\limits_{Q_{i0}^i \cap Q_{i3}^k \cap Q_{i0}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau + \int\limits_{Q_{i0}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i1}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau + \int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau \right] +$$

$$+\sum_{\ell,k=1}^{n} \int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} \left(\delta^{p-2} - \varepsilon n |\overline{u}_\ell|^2\right) w_i^2 dxd\tau + \tag{17}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} \left(\delta^{-p+2} - \varepsilon n |\overline{u}_i|^2\right) w_i^2 dxd\tau \right\}.$$

Отсюда при условии $\int\limits_{Q_{i8}^k} |\overline{u}_i|^p dxd\tau \le \delta_0^p \Rightarrow mes Q_{i8}^k < \delta_0 \delta^p$ получаем

$$\mathrm{I}_1 \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[\int\limits_{Q_{i0}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i0}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau + \int\limits_{Q_{i0}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i1}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{Q_{i0}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} 4\varepsilon n |\overline{u}_k|^2 \delta^2 dxd\tau \right] \le 2\varepsilon n \left(\delta^4 \delta_0 + \delta_0 + \delta^{p-2} \delta_0^{2+(p-2)/p}\right) \le 4\varepsilon n \delta_0.$$

Далее, имеем

$$\int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} \left(\delta^{p-2} - \varepsilon n |\overline{u}_\ell|^2\right) w_i^2 dxd\tau \ge \int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} \delta^{p-2} w_i^2 dxd\tau -$$

$$- \varepsilon n \left(\int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} |\overline{u}_\ell|^p dxd\tau \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} |w_i|^{\frac{2p}{p-2}} dxd\tau \right)^{\frac{p-2}{p}} \ge$$

$$\ge \delta^{p-2} \int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} w_i^2 dxd\tau - \varepsilon n \delta_0^{2/p} \left(\int\limits_{Q_{i1}^i \cap Q_{i8}^k \cap Q_{i2}^i \cap Q_{i8}^i} |w_i|^{\frac{2p}{p-2}} dxd\tau \right)^{\frac{p-2}{p}},$$

кроме того, имеем

$$\int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} \left(\delta^{-p+2} - \varepsilon n |\overline{u}_i|^2\right) w_i^2 dxd\tau \ge \delta^{-p+2} \int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} w_i^2 dxd\tau -$$

$$- \varepsilon n \left(\int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i3}^k \cap Q_{i8}^k} |\overline{u}_k|^p dxd\tau \right)^{2/p} \left(\int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} |w_i|^{\frac{2p}{p-2}} dxd\tau \right)^{(p-2)/p} \ge$$

$$\ge \delta^{-p+2} \int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} w_i^2 dxd\tau - \varepsilon n \delta_0^{2/p} \left(\int\limits_{Q_{i8}^i \cap Q_{i2}^k \cap Q_{i8}^k} |w_i|^{\frac{2p}{p-2}} dxd\tau \right)^{(p-2)/p}$$

Теперь учитывая эти оценки в (17) получим:

$$\mathrm{I} \geq \sum_{n=1}^{n} \Big\{ \left(\delta^{p} - \varepsilon n\right) mes\left(Q_{t1}^{i} \setminus \left(Q_{t2}^{i} \cup Q_{t\delta} \cup \widetilde{Q}_{t0}^{i}\right)\right) - 4\varepsilon n\delta_{0} +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t2}^{i} \setminus \left(Q_{t0}^{i} \cup Q_{t0}^{i}\right)} \left(\left|\overline{u}_{i}\right|^{p-4} - \varepsilon n\right)\left|\overline{u}_{i}\right|^{2} \delta^{2} dx d\tau + \delta^{p-2} \int\limits_{Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}} w_{i}^{2} dx d\tau + \delta^{-p+2} \int\limits_{Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}} w_{i}^{2} dx d\tau -$$

$$- \varepsilon n \delta_{0}^{2/p} \left(\int\limits_{Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}} \left|w_{i}\right|^{\frac{2p}{p-2}} dx d\tau \right)^{(p-2)/p} - \varepsilon n \delta_{0}^{2/p} \left(\int\limits_{Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}} \left|w_{i}\right|^{\frac{2p}{p-2}} dx d\tau \right)^{(p-2)/p} \Bigg\}.$$

Отсюда, поскольку по предположению для w_i выполняется равенства (15), и следовательно, в силу известного неравенства, имеем

$$\left\|w_{i}\right\|_{L_{2}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)} \leq \mathrm{K}_{1}\left(p, mes Q\right)\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}, \; 2 < q = \frac{2p}{p-2} \leq 4,$$

при этом если существует постоянная $\mathrm{M}_0(p, mes\,\Omega)>0$ такая, что

$$\mathrm{M}_{0} \geq \frac{\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}}{\left\|w_{i}\right\|_{L_{2}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}} \;\; \& \;\; \mathrm{M}_{0} \geq \frac{\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}}{\left\|w_{i}\right\|_{L_{2}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}}$$

тогда, для последних слагаемых имеем (обозначим их через I_2)

$$\mathrm{I}_{2} \equiv \delta^{p-2}\left\|w_{i}\right\|_{L_{2}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} - \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}}\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} +$$

$$\delta^{-p+2}\left\|w_{i}\right\|_{L_{2}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} - \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}}\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \geq$$

$$\left(\delta^{p-2} - \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}} \mathrm{M}_{0}\right)\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} + \left(\delta^{-p+2} - \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}} \mathrm{M}_{0}\right)\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2}$$

отсюда нетрудно видеть, что если предположить, что ε>0 удовлетворяет неравенству $\left(\delta^{p-2} - \varepsilon n \delta_{0}^{2/p} \mathrm{M}_{0}\right) \geq 0$, то эти слагаемые также можем не учитывать в дальнейщем. Ясно, что такое число ε>0 существует. А если такого числа нет, то эти слагаемые можно оценить следующим образом:

$$\text{при } p > 4 \rightarrow \left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} \leq 2\left\|\overline{u}_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} \leq$$

$$\leq 2\left(mes\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)\right)^{\frac{p-2}{p-4}}\left\|\overline{u}_{i}\right\|_{L_{p}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} \leq 2\delta_{0}^{\frac{p-2}{p-4}+\frac{2}{p}} \delta^{p\frac{p-2}{p-4}} \;\; \&$$

$$\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \leq 2\left\|\overline{u}_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \leq$$

$$\leq 2\left(mes\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)\right)^{\frac{p-2}{p-4}}\left\|\overline{u}_{i}\right\|_{L_{p}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \leq 2\delta_{0}^{\frac{p-2}{p-4}+\frac{2}{p}} \delta^{p\frac{p-2}{p-4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}}\left\|w_{i}\right\|^{2}_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)} + \varepsilon n \delta_{0}^{\frac{2}{p}}\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \leq 4\varepsilon n \delta_{0}^{\frac{p-2}{p-4}+\frac{4}{p}} \delta^{p\frac{p-2}{p-4}};$$

$$\text{при } p = 4 \Rightarrow \varepsilon n \delta_{0}^{1/2}\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t\delta}^{i} \cap Q_{t2}^{k} \cap Q_{t\delta}^{k}\right)}^{2} + \varepsilon n \delta_{0}^{1/2}\left\|w_{i}\right\|_{L_{q}\left(Q_{t1}^{i} \cap Q_{t\delta}^{k} \cap Q_{t2}^{i} \cap Q_{t\delta}^{i}\right)}^{2} \leq 4\varepsilon n \delta_{0}.$$

Таким образом остается рассмотреть первые три слагаемые (в худшем случае удваивается коэффициент последнего слагаемого), т.е. ε>0 надо выбрать так, чтобы эта часть так же была неотрицательной. Итак, имеем:

$$I \geq \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \left(\delta^p - \varepsilon n\right) mes\left(\Omega_1^i \setminus \left(\Omega_2^i \cup \Omega_\delta \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)\right) + \int\limits_{\Omega_2^i \setminus \left(\Omega_0^i \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)} \left(\left|\overline{u}_i\right|^{p-4} - \varepsilon n\right) \left|\overline{u}_i\right|^2 \delta^2 dx -$$

$$- 8\varepsilon\delta_0 n \Big\} = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \left(\delta^p - \varepsilon n\right) mes\left(\Omega_1^i \setminus \left(\Omega_2^i \cup \Omega_\delta \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)\right) + \delta^2 \int\limits_{\Omega_2^i \setminus \left(\Omega_0^i \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)} \left|\overline{u}_i\right|^{p-2} dx -$$

$$- \delta^2 \varepsilon n \int\limits_{\Omega_2^i \setminus \left(\Omega_0^i \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)} \left|\overline{u}_i\right|^2 dx - 8\varepsilon\delta_0 n \Big\} \geq \delta^2 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_2^i \setminus \left(\Omega_0^i \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)} \left|\overline{u}_i\right|^{p-2} dx - \delta^2 \varepsilon n \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_2^i \setminus \left(\Omega_0^i \cup \tilde{\Omega}_0^i\right)} \left|\overline{u}_i\right|^2 dx \; -$$

$$- 8\delta_0 \varepsilon n \geq \delta^2 \inf\left\{ \left\|\overline{u}_i\right\|_{L_{p-2}(\Omega)}^{p-2} \middle| i = \overline{1,n} \right\} - 2n\delta^p \delta_0 - \delta^2 \varepsilon n^2 \sup\left\{ \left\|\overline{u}_i\right\|_{L_2(\Omega_2^i)}^2 \middle| i = \overline{1,n} \right\} - 4\delta_0 \varepsilon n.$$

Введем обозначения

$$\inf\left\{ \left\|\overline{u}_i\right\|_{L_{p-2}(\Omega)}^{p-2} \middle| i = \overline{1,n} \right\} = N_{p-2}^{p-2}, \quad \sup\left\{ \left\|\overline{u}_i\right\|_{L_2(\Omega_2^i)}^2 \middle| i = \overline{1,n} \right\} = N_2^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\exists M_0 > 0 \rightarrow N_{p-2} = M_0 N_2\right).$$

Тогда имеем

$$I \geq \delta^2 N_{p-2}^{p-2} - 2n\delta^p \delta_0 - \delta^2 \varepsilon n^2 M_0^{-2} N_{p-2}^2 - 8\delta_0 \varepsilon n = \delta^2 \Big(N_{p-2}^{p-2} - 2n\delta^{p-2}\delta_0 -$$

$$- \varepsilon n^2 M_0^{-2} N_{p-2}^2 - 8\delta_0 \delta^{-2} \varepsilon n \Big) = \delta^2 \left[N_{p-2}^{p-2} - 2n\delta^{p-2}\delta_0 - \varepsilon n \left(n M_0^{-2} N_{p-2}^2 + 8\delta_0 \delta^{-2} \right) \right]$$

Таким образом получаем, что в условиях леммы 5 для выполнения неравенства из этой леммы достаточно, чтобы число $\varepsilon>0$ удовлетворяло следующему неравенству:

$$0 < \varepsilon \leq \inf\left\{ \frac{\delta^p}{n}, \; \frac{N_{p-2}^{p-2} - 2n\delta^{p-2}\delta_0}{n\left(n M_0^{-2} N_{p-2}^2 + 8\delta_0 \delta^{-2}\right)} \right\} .$$

Таким образом получаем, что существует $\varepsilon>0$ зависящая от выбранных $\delta>0$, $\delta_0>0$ и независящая от значения функций $w(x,t)$ в точке такое, что утверждение леммы 5 выполняется. Тем самым лемма 5 полностью доказана.

Этим и завершается доказательство теоремы единственности , т.е. теорема 5 полностью доказана.

Литература

[1]. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*.- М., ''Мир'', 1972.

[2]. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*.- М. «Наука« , 1970.

[3]. Qiang Du., Max D. Ginzburger. *Analysis of a Ladijzenskiya model for incompressible iscousflow*. // J.Math.Anal. Appl., v. 155, 1,1992.

[4]. Соболевский П. Е . *Существование решений математической модели нелинейно вяз кой жидкости*. // ДАН СССР/, т. 285, N1,1985

[5]. Солтанов К. Н. *Некоторые теоремы вложения и их приложения к нелинейным уравне ниям*. //Дифф. уравн., т.20, N12, 1984.

[6]. Солтанов К. Н. *Теоремы вложения для нелинейных пространств и разрешимость некоторых нелинейных некоэрцитивных уравнений*. Деп. в ВИНИТИ, 16709.91-№ 3697-В91, Москва, 1991, 71стр.

[7]. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций*

и теоремы вложения. М., «Наука», 1975.

[8]. Солтанов К.Н. *Некоторые применения нелинейного анализа к дифференциальным урав нениям*. Доктор. дисс ., М., МГУ, 1993.

[9]. *Странные аттракторы*. М. , « Мир», сер. Математика, 1981.