1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.946

ШАРИФОВ Т.А.

РАЗРЕШИМОСТЬ "В ЦЕЛОМ" СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе методом априорных оценок исследуется следующая начально-краевая задача

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} = F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \tag{3}$$

где $x \in [0;l]$; $t \in [0;T]$, $0 < T$, $l < \infty$; $\alpha > 0$ - фиксированное число; F, φ, ψ - заданные функции; $u(t,x)$ - искомая функция.

Для задачи (1)-(3) доказывается теорема о существовании глобального решения. Причем под решением задачи (1)-(3) понимается следующее:

Определение 1. *Решением почти всюду задачи (1)-(3) назовем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $D_T = [0,T] \times [0,l]$ вместе с производными $u_t(t,x)$, $u_x(t,x)$, $u_{tx}(t,x)$ и $u_{xx}(t,x)$, имеющую производные $u_{tt}(t,x)$ и $u_{txx}(t,x)$, принадлежащие $L_2(D_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в D_T и принимающую все значения (2) и (3) в обычном смысле.*

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

1. Функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0;l]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0,l)$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$; функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,l]$, $\psi''(x) \in L_2(0,l)$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

2. а) Функция $F(t,\xi_1,\ldots,\xi_6)$ непрерывна в замкнутой области $D_T \times (-\infty,\infty)^5$ вместе с производными $F_{\xi_i}(t,\xi_1,\ldots,\xi_6)$ $(i=\overline{1,6})$;

   б) $\forall t \in [0;T]$ и ξ_4, $\xi_5 \in (-\infty,\infty)$
$$F(t,0,0,0,\xi_4,\xi_5,0) = F(t,l,0,0,\xi_4,\xi_5,0) = 0.$$

3. В области $D_T \times (-\infty,\infty)^5$:
$$\left|F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a(t,x) + b(t,x)\left(|u| + |u_t| + |u_x|\right) + + c(t)\left(|u_{tx}| + |u_{xx}|\right), \tag{4}$$
   где $a(t,x), b(t,x) \in L_2(0,T)$.

4. Для каждого $R > 0$ в области $D_T \times [-R,R]^3 \times (-\infty,\infty)^2$:
$$\left|F_x(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\left(u_{tx}^2 + u_{xx}^2\right),$$
$$\left|F_u(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\left(u_{tx}^2 + u_{xx}^2\right),$$

$$\left|F_{u_t}\left(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}\right)\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\left(\left|u_{tx}\right| + \left|u_{xx}\right|\right),$$

$$\left|F_{u_x}\left(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}\right)\right| \le a_R(t,x) + b_R(t)\left(\left|u_{tx}\right| + \left|u_{xx}\right|\right),$$

$$\left|F_{u_{tx}}\left(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}\right)\right| \le b_R(t),$$

$$\left|F_{u_{xx}}\left(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}\right)\right| \le b_R(t),$$

где $a_R(t,x) \in L_2(D_T)$, $b_R(t) \in L_2(0,T)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1-4. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.*

Доказательство. Определим следующие функциональные пространства:

Определение. *Пусть*

$$u_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

- коэффициенты Фурье искомого решения $u(t,x)$ по полной в $L_2(0,l)$ системе

$$\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Обозначим через $B^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_s}_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,T}$ совокупность всех функций вида

$$u(t,x) = \sum_1^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

рассматриваемых в D_T, где $u_n(t)$ $s\ge$ - раз непрерывно дифференцируемы на $[0;T]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^{\alpha_i}\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right\}^{\beta_i} < \infty \quad \left(i=\overline{0,s}\right),$$

а $\alpha_i \ge 0\left(i=\overline{0,s}\right), 1\le\beta_i\le 2$ - фиксированные числа. Норму в этом пространстве определим так:

$$\left\|u(t,x)\right\|_{B^{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_s}_{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,T}} = \sum_{i=0}^{s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{1/\beta_i}.$$

По результатам работы [1] известно, что существует в малом единственное, в целом решение почти всюду задачи (1)-(3). Чтобы доказать данную теорему достаточно установить априорную ограниченность в $B^{3,2}_{2,2,T}$ всевозможных решений почти всюду задачи (1)-(3) принадлежащих пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$ (см.[1]).

Итак, пусть

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

- любое решение почти всюду задачи (1)-(3), принадлежащее пространству $B^{3,2}_{2,2,T}$. Легко получить, что $\forall t\in[0;T]$

$$\|u\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} \le 2\|z\|_{B^{3,1}_{2,2,T}} + \frac{4l}{\alpha\pi^2}\left(\frac{2l^2}{\alpha\pi^2}T+1\right)\int_0^t\int_0^l\left\{\mathscr{F}\left(u(\tau,\xi)\right)\right\}^2 d\xi\, d\tau, \tag{5}$$

где функция $z(t,x)$ определена соотношением

$$z(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n + \frac{l^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{l^2} t} \right) \psi_n \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x , \tag{6}$$

а оператор $\mathscr{F}$ определен соотношением

$$\mathscr{F}(u(t,x)) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)). \tag{7}$$

Пользуясь оценками

$$u^2(t,x) \le \frac{\pi^2}{6} \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \qquad u_t^2(t,x) \le \frac{\pi^2}{6} \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}},$$

$$u_x^2(t,x) \le \frac{\pi^2}{6l^2} \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}, \qquad \int_0^t \int_0^l u_{tx}^2(t,x)\,dx\,dt \le \frac{\pi^2}{l^2} \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}},$$

$$\int_0^l u_{xx}^2(t,x)\,dx \le \frac{\pi^4}{l^4} \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \tag{8}$$

и неравенство (4), из (5) получаем, что $\forall 0 \le t \le T$

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}} \le 2\|z\|_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{24l(2l^2T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^4} \|a(t,x)\|^2_{L_2(D_T)} +$$

$$+ \frac{24l(2l^2T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^2} \int_0^t \left\{ \frac{\pi^2(2l^2 + \pi^2)}{6l^2} \int_0^l b^2(\tau,\xi)\,d\xi + \frac{\pi^2(l^2 + \pi^2)}{l^2} C^2(\tau) \right\} \times$$

$$\times \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\, d\tau = C_1 + \int_0^t e(\tau) \|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,\tau}}\, d\tau , \tag{9}$$

где

$$C_1 \equiv 2\|z\|_{B^{2,1}_{2,2,T}} + \frac{24l(2l^2T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^4} \|a(t,x)\|^2_{L_2(D_T)},$$

$$e(\tau) \equiv \frac{24l(2l^2T + \alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^4} \left\{ \frac{\pi^2(2l^2 + \pi^2)}{6l^2} \int_0^l b^2(\tau,\xi)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2(l^2 + \pi^2)}{l^2} C^2(\tau) \right\} \in L(0,T).$$

Из (9), применив неравенство Р. Беллмана, имеем:

$$\|u\|^2_{B^{2,1}_{2,2,T}} \le C_1 \cdot \exp\left\{ \int_0^T e(\tau)\,d\tau \right\} \equiv C_2 , \tag{10}$$

т.е. всевозможные решения почти всюду $u(t,x) \in B^{3,2}_{2,2,T}$ задачи (1)-(3) априори ограничены в $B^{2,1}_{2,2,T}$.

Из априори оценки (10), в силу оценок (8), следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(D_T)} \le R, \quad \|u_t(t,x)\|_{C(D_T)} \le R, \quad \|u_x(t,x)\|_{C(D_T)} \le R,$$

$$\int_0^l u_{tx}^2(t,x)\,dx \le C_3 , \quad \int_0^l u_{xx}^2(t,x)\,dx \le C_3 , \quad \forall t \in [0;T]. \tag{11}$$

Далее, при условиях данной теоремы из следующей системы

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{l^2}{\alpha n^2\pi^2}\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}t}\right)\psi_n+$$

$$+\frac{2l^2}{\alpha n^3\pi^3}\int_0^t\int_0^l\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\left(1-e^{-\frac{\alpha n^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\right)\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi d\tau \tag{12}$$

получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\le 2\|z\|_{B^{3,2}_{2,2,T}}+\frac{4l^3(2l^2T+\alpha\pi^2)}{\alpha^2\pi^6}\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\right\}^2 d\xi d\tau . \tag{13}$$

Пользуясь априорными оценками (11), $\forall t\in[0;T]$ имеем:

$$\int_0^l u^4_{tx}(t,x)dx\le\frac{\pi^4}{6l^2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^l u^2_{tx}(t,x)dx\le C_4\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} , \tag{14}$$

$$\int_0^l u^2_{tx}(t,x)u^2_{xx}(t,x)dx\le\frac{\pi^4}{6l^2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^l u^2_{xx}(t,x)dx\le C_4\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} , \tag{15}$$

$$\int_0^l u^4_{xx}(t,x)dx\le\frac{\pi^4}{6l^2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\cdot\int_0^l u^2_{xx}(t,x)dx\le C_4\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} , \tag{16}$$

С другой стороны, для любых $t\in[0;T]$ имеем:

$$u^2_{tx}(t,x)\le\frac{\pi^4}{6l^2}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} ,\quad u^2_{xx}(t,x)\le\frac{\pi^6}{6l^4}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} , \tag{17}$$

$$\int_0^l u^2_{txx}(t,x)dx\le\frac{\pi^4}{2l^3}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} ,\quad \int_0^l u^2_{x^3}(t,x)dx\le\frac{\pi^6}{2l^5}\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}} . \tag{18}$$

Теперь, представив в себе развернутое выражение

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{F}(u(\tau,\xi))\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}F(\tau,\xi,u(\tau,\xi),u_\tau(\tau,\xi),u_\xi(\tau,\xi),u_{\tau\xi}(\tau,\xi),u_{\xi\xi}(\tau,\xi))$$

пользуясь априорными оценками (11), условием 4 данной теоремы и оценками (14)-(18), из (13) легко получить, что $\forall t\in[0;T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,t}}\le C_5+\int_0^t C_6(\tau)\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,\tau}}d\tau , \tag{19}$$

где $C_5>0$ - некоторое постоянное, $0\le C_6(\tau)\in L(0,T)$.

Из (19), применив неравенство Р. Беллмана, получаем справедливость априорной оценки

$$\|u\|^2_{B^{3,2}_{2,2,T}}\le C_5\cdot\exp\left\{\int_0^T C_6(\tau)d\tau\right\}\equiv C_6 . \tag{20}$$

Этим теорема доказана.

Литература

[1]. Шарифов Т.А. *Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью.* II. Деп. в АзНИИНТИ, №187 от 04.04.1984г.