УДК 517.9

АЛИЕВ А.Б., ИЛЬЯСОВ М.Х., МАМЕДГАСАНОВ Э.Г.

## ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО СОСТАВНОМУ НЕЛИНЕЙНОМУ ВЯЗКОУПРУГОМУ СТЕРЖНЮ

Пусть с торца $x=0$ реализуется удар по нелинейному вязкоупругому стрежню, состоящему из конечной $(0 \le x \le l)$ и полубесконечной $(l \le x \le \infty)$ частей. Физико-механические свойства обеих частей описываются кубичной теорией вязкоупругости Ильюшина -Огибалова с произвольными разностными ядрами линейной и нелинейной наследственности. Определение напряженно-деформированного состояния стрежня описывается следующей задачей, соответствующей методы последовательных приближений:

$$\frac{\partial^2 u_{i,n+1}}{\partial x^2} - \int_0^t \Gamma_i(t-\tau)\frac{\partial^2 u_{i,n+1}}{\partial x^2}d\tau - \frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2 u_{i,n+1}}{\partial t^2} = \int_0^t R_i(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{i,n}}{\partial x}\right)^3 d\tau,$$

$$\sigma_{i,n+1} = E_i\left[\frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x} - \int_0^t \Gamma_i(t-\tau)\frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial x}d\tau - \int_0^t R_i(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{i,n}}{\partial x}\right)^3 d\tau\right],$$

$$u_{i,n+1} = (x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u_{i,n+1}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2;$$

$$\sigma_{1,n+1}(0,t) = f(t), \quad u_{2,n+1} \to 0, \text{ при } x \to \infty;$$

$$u_{1,n+1}(l,t) = u_{2,n+1}(l,t), \quad \sigma_{1,n+1}(l,t) = \sigma_{2,n+1}(l,t), \quad n = 0,1,2,...,; \quad u_{i,0} \equiv 0.$$

Здесь $i=1$ соответствует конечной части, $i=2$- полубесконечной, $u_{i,o}(x,t) \equiv 0$, $\sigma_{i,0}(x,t) \equiv 0$, $\Gamma_i(t)$ – ядро линейной, а $R_i(t)$ – нелинейной релаксации, *f(t)*- заданная функция, остальные обозначения общеизвестные.

Аналогичная задача, когда материалы обех частей описываются разными наследственными свойствами линейной вязкоупругости рассмотрена в [1].

Задачу решаем с помощью интегрального преобразования Лапласа, а обратные преобразования Лапласа вычисляются с использованием обобщенной теоремы умножения Эфроса и вспомогательными функциями, построенными в [2]. При нагрузке вида $f(t) = \sigma_0 H(t)$, где $\sigma_0 = const$, $H(t)$ единичная функция Хевисайда, для любого $n$-го приближения получены следующие решения:

$$u_{1,n+1}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{a_1^2\int_0^t\left[\Phi_n(\tau) - \Phi_n^l(\tau)\right]d\tau\left(\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\left[W_1(2\ln - x,t) - W_1(2\ln + x,\tau)\right]*\right.\right.\right.$$

$$\left.*\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=0} d\tau\right\rangle + \frac{\sigma_0}{E_1}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left[W_1(2\ln - x,\tau) - W_1(2\ln + x,\tau)\right]d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\left\langle\left[W_1(2\ln - x + s,\tau) - W_1(2\ln + x + s,\tau) + W_1(2\ln - x - s,\tau) - W_1(2\ln + x - s,\tau)\right]*\right.$$

$$\times\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\Bigg\rangle ds\Bigg)\Bigg\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\int_0^t \Phi_n(t-\tau)\left[W_1(2\ln+x,\tau)+W_1(2\ln-x,\tau)\right]d\tau\times\right.$$

$$\times a_2^2\int_0^{\infty}\left\langle\frac{\partial}{\partial s}W_2(s-l,t)*\int_0^t R_2(t-\tau)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u_{2,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right\rangle ds\Bigg\}+$$

$$+\frac{a_1^2}{E_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\int_0^t \Phi_n^1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left[W_1(2\ln-x-l,\tau)-W_1(2\ln+x+l,\tau)\right]d\tau\times\right.$$

$$\times\left[E_1\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=l}d\tau-E_2\int_0^t R_2(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{2,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=l}d\tau\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{a_1^2}{2}\int_0^l\left\langle\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}W_1(s+x,\tau)d\tau*\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right\rangle ds+$$

$$+a_1^2\left\langle\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}W_1(x,\tau)d\tau*\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=0}d\tau\right\rangle+$$

$$+\frac{\sigma_0 a_1^2}{E_1}\int_0^t(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}W_1(x,\tau)d\tau-\frac{a_1^2}{2}\int_0^x\left\langle\frac{\partial}{\partial x}W_1(x-s,\tau)d\tau*\right.$$

$$*\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\Bigg\rangle ds-\frac{a_1^2}{2}\int_0^l\left\langle\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}W_1(s-x,\tau)d\tau\right\rangle*$$

$$*\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\Bigg\rangle ds$$

$$u_{2,n+1}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\int_0^t\Phi_n^1(t-\tau_2)W_2(x-l,\tau)d\tau*\left\langle\frac{a_1^2}{2}\int_0^l\frac{\partial}{\partial s}\times\right.\right.$$

$$\times\Big(\big[W_1(s+2\ln-l,t)-W_1(s+2\ln+l,t)+W_1(2\ln+l-s,t)-W_1(2\ln-l-s,t)\big]\times$$

$$\times\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\Bigg)ds+\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{a_1}{2nl+l}W_1(2\ln+l,t)-\frac{a_1}{2nl-l}W_1(2\ln-l,t)\right]\times\right.$$

$$\times\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=0}d\tau\Bigg)+\frac{\sigma_0}{E_1}\left[\frac{a_1}{2nl+l}W_1(2\ln+l,t)-\frac{a_1}{2nl-l}W_1(2\ln-l,t)\right]+$$

$$+\frac{E_1 a_2^2}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\int_0^t\Phi_n^1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}W_2(x-l,\tau)d\tau\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\int_0^l\Big\langle\big[W_1(s+2\ln+l,t)-W_1(s+2\ln-l,t)+W_1(2\ln+l-s,t)-W_1(2\ln-l-s,t)\big]*\right.$$

$$*\int_0^e R_1(t-\tau)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{ds}\right)^3 d\tau\Bigg\rangle ds+\Big\langle\left[W_1(2\ln+l,t)-W_1(2\ln-l,t)\right]*$$

$$*\int_0^e R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{dx}\right)^3_{x=0} d\tau\Bigg\rangle+\frac{\sigma_0}{E_1}\int_0^t\left[W_1(2\ln+l,\tau)-W_1(2\ln-l,\tau)\right]\Big)d\tau\Bigg\}+$$

$$+\frac{a_2}{E_2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\int_0^t\Phi_n^1(t-\tau)W_1(x-l,\tau)d\tau*\Big(\left[W_1(2\ln,t)-W_1(2\ln-2l,t)\right]\times\right.$$

$$\times\Bigg\langle\int_e^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}W_2(s-l,t)*\int_0^t R_2(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{2,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right]ds+$$

$$\left.+E_2\int_0^t R_2(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{2,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=l}d\tau-E_1\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=l}d\tau\Bigg\rangle\Big)\right\}+$$

$$+\frac{a_2^2}{E_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}W_2(x-l,t)\left(\sigma_0\int_0^t W_1(l,\tau)+E_1\left[W_1(l,t)*\int_0^t R_1(t-\tau)\left(\frac{\partial u_{1,n}(x,\tau)}{\partial x}\right)^3_{x=0}d\tau\right]+\right.\right.$$

$$+\frac{E_1}{2}\int_0^l\left[W_1(s+l,t)*\int_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{1,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right]ds-$$

$$\left.\left.-E_2\int_0^t\int_0^\tau R_2(\tau-s)\left(\frac{\partial u_{2,n}(x,s)}{\partial x}\right)^3_{x=l}d\tau ds\right)\right\}+$$

$$+\frac{a_2^2}{2}\int_0^x\left\langle\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}W_2(x-s,\tau)d\tau*\int_0^t R_2(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{2,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right\rangle ds-$$

$$\left.-\frac{a_2^2}{2}\int_x^{\infty}\left\langle\frac{\partial}{\partial x}W_2(s-x,\tau)d\tau*\int_0^t R_2(t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_{2,n}(s,\tau)}{\partial s}\right)^3 d\tau\right\rangle ds\right\}.$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\Phi_n(t)=\int_0^{\infty}\varphi_n(\tau)\Omega(t,\tau)d\tau,\quad \varphi_n(t)=L^{-1}\left[\left(1-\frac{E_1a_2}{E_2a_1}p\right)^{n-1}\left(1+\frac{E_1a_2}{E_2a_1}p\right)^{-n}\right];$$

$$\Phi_n^1(t)=\int_0^{\infty}\varphi_n^1(\tau)\Omega(t,\tau)d\tau,\quad \varphi_n^1(t)=L^{-1}\left[\left(\frac{E_2a_1}{E_1a_2}p-1\right)^{n-1}\left(\frac{E_2a_1}{E_1a_2}p+1\right)^{-n}\right];$$

$$\Omega(t,\tau)=e^{-\tau}\delta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}G_n(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!}(2\tau)^{k+1};$$

$$G_1(t) = K_2(t) - K_1(t) - \int_0^t [K_2(\tau) - K_1(\tau)]\Gamma_1(t-\tau)d\tau;$$

$$G_n(t) = \int_0^t G_1(t-\tau)G_{n-1}(\tau)d\tau;$$

$$W_1(z,t) = \sigma_0 H\left(t - \frac{z}{a_i}\right)\left[1 + \sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{2z}{a_i}\right)^{m+1} K_{in}^{(m)}\left(t - \frac{z}{a_i}\right)\right];$$

$$K_{in}(t) = \int_0^t K_{il}(t-\tau)K_{in-1}(\tau)d\tau,$$

$K_i(t)$ – ядро линейной ползучести, $\delta(t)$ – дельта функция Дирака, $L^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа.

Поскольку решения поучены для любого $n$ – го приближения, нетрудно доказать быструю сходимость последовательных приближений. Это в свою очередь обеспечивает получение числовых решений с любой заранее заданной точностью.

Заметим, что вопросы существования и единственности решений подобных задач рассмотрена в работах [3].

**Литература**

[1]. Ильясов М.Х., Э.Г.Мамедгасанов *Волны напряжений в составном полубесконечном наследственно упругом стрежне.* Сборник докладов. Меж-ный конф., Актуальные проблемы фундаментальных наук, Москва 1991.

[2]. Ильясов М.Х. *О методах решения пространственных линейных нестационарных задач о распространении возмущений в изотропных однородных и анизотропных вязкоупругих средах.* Изв . АН Аз ССР, сер. физ.-техн. И мат. наук, 1983, № 6

[3]. Алиев А.Б. *Задача Коши для квазилинейных уравнений высокого порядка гиперболического типа с вольтерровым оператором* .ДАН СССР т.280, № 1, 1985.