УДК 539.3

ИСАЕВ Ф.К., МУСАЕВ Р.М.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Рассмотрим задачу устойчивости двухслойной сплошной круглой пластинки радиуса R, сжатой по контуру равномерно распределенной радиальной нагрузкой интенсивностью P.

Предположим, что пластинка изготовлена из неоднородного ортотропного материала, причем упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координаты толщины и радиуса. Связь между компонентами напряжений и деформаций для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\sigma_r^i = B_r^i(e_r + \nu_\theta^i e_\theta), \quad \sigma_\theta^i = B_\theta^i(e_r + \nu_r^i e_r), \quad \tau_{r\theta} = G_{r\theta}^i e_{r\theta}\,, \tag{1}$$

где

$$B_r^i = \frac{E_r^i}{1-\nu_r^i\nu_\theta^i}, \quad B_\theta^i = \frac{E_\theta^i}{1-\nu_r^i\nu_\theta^i}, \quad (i=1,2)\,.$$

Здесь коэффициенты Пуассона ν_r^i, ν_θ^i считаются постоянными. Рассмотрим такой вид неоднородности, упругие характеристики которой в формулах (1) могут быть представлены в следующем виде:

$$B_r^i = B_{11}^i(r)B_{12}^i(z), \quad B_\theta^i = B_{21}^i(r)B_{22}^i(z), \quad G_{r\theta}^i = B_{31}^i(r)B_{32}^i(z) \tag{2}$$

Предположим, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью разделяющей слои пластинки и гипотеза Кирхгофа-Лява справедлива для всей толщины элемента пластинки т.е.

$$e_r = \varepsilon_r - z\chi_r, \quad e_\theta = \varepsilon_\theta - z\chi_\theta, \quad e_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta} - z\chi_{r\theta}\,, \tag{3}$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$ и $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ бесконечно малые изменения деформации, кривизны и кручения срединной плоскости.

Как известно, компоненты усилий и моментов вычисляются по следующим формулам:

$$T_r = \int_{-h_2}^{0} \sigma_r^2 dz + \int_0^{h_1} \sigma_r^1 dz, \ldots$$

$$M_r = \int_{-h_2}^{0} z\sigma_r^2 dz + \int_0^{h_1} z\sigma_r^1 dz, \ldots \tag{4}$$

Здесь h_1 и h_2 -толщины соответствующих слоев пластинки. С учетом (1)-(3) из (4) для компонентов усилий и моментов получим:

$$T_r = \alpha_{11}\varepsilon_r + \alpha_{12}\varepsilon_\theta - \beta_{11}\chi_r - \beta_{12}\chi_\theta, \ldots \tag{5}$$

$$M_r = \beta_{11}\varepsilon_r + \beta_{12}\varepsilon_\theta - c_{11}\chi_r - c_{12}\chi_\theta, \ldots \tag{6}$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = B_{11}^{2}(r)b_{12}^{20} + B_{11}^{1}(r)b_{12}^{10}, \ldots$$
$$\beta_{11} = B_{11}^{2}(r)b_{12}^{21} + B_{11}^{1}(r)b_{12}^{11}, \ldots \tag{7}$$
$$c_{11} = B_{11}^{2}(r)b_{12}^{22} + B_{11}^{1}(r)b_{12}^{12}$$

$$b_{12}^{2i} = \int_{-h_2}^{0} B_{12}^{2}(z)z^{i}dz, \ldots$$

$$b_{12}^{2i} = \int_{0}^{h_1} B_{12}^{1}(z)z^{i}dz, \ldots \quad (i = 0,1,2,)$$

$$b_{22}^{2i} = \int_{-h_2}^{0} B_{22}^{2}(z)z^{i}dz, \ldots$$

Система уравнений равновесия круговых пластинок состоит из следующих [3]:

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(T_r - T_\theta) = 0, \quad \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}T_{r\theta} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial r} +$$
$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2} + \sigma_r h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \tag{9}$$

Уравнение совместности деформации в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial r\partial\theta} \tag{10}$$

Если ввести функцию напряжений F соотношениями

$$T_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad T_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad T_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}, \tag{11}$$

тогда система (8) удовлетворяются тождественно. Определим $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$ из соотношений (5) через компоненты усилий и кривизы:

$$\varepsilon_r = d_{11}T_r + d_{12}T_\theta + D_{11}\chi_r + D_{12}\chi_\theta,$$
$$\varepsilon_\theta = d_{21}T_r + d_{22}T_\theta + D_{21}\chi_r + D_{22}\chi_\theta, \quad \varepsilon_{r\theta} = d_{31}T_{r\theta} + d_{32}\chi_{r\theta} \tag{12}$$

Здесь обозначены:

$$d_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\Delta}, \quad d_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta}, \quad \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21},$$
$$D_{12} = \frac{1}{\Delta}\left(\beta_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\beta_{21}\right), \ldots \tag{13}$$

Подставляя (12) в (6) для компонентов моментов находим формулы:

$$M_r = a_{11}T_r + a_{12}T_\theta + A_{11}\chi_r + A_{12}\chi_\theta, \quad M_{r\theta} = a_{31}T_{r\theta} + A_{31}\chi_{r\theta},$$
$$M_\theta = a_{21}T_r + a_{22}T_\theta + A_{21}\chi_r + A_{22}\chi_\theta \tag{14}$$

где обозначено:

$$a_{11} = \beta_{12}d_{11} + \beta_{12}d_{21}, \quad a_{12} = \beta_{11}d_{12} + \beta_{12}d_{22},$$
$$A_{11} = \beta_{11}D_{11} + \beta_{12}D_{21} - c_{11}, \quad A_{12} = \beta_{11}D_{12} + \beta_{12}D_{22} - c_{12}, \ldots \tag{15}$$

С учетом (11), (12), (14) из (9) и (10) получается сложная система дифференциальных уравнений частными производными с переменными коэффициентами относительно прогиба W и функции напряжения F.

В общем виде решение этих уравнений связано большими математическими трудностями. Поэтому для получения качественных результатов надо рассмотреть конкретные виды неоднородности. Рассмотрим случай, когда упругие характеристики материала слоев зависять только от координаты толщины и изменяются по следующим законам:

$$B^1_{12}(z)=B^1_{22}(z)=1+\mu_1\frac{z}{h_1},\quad B^1_{12}(z)=B^2_{22}(z)=1+\mu_2\frac{z}{h_2},$$

$$B^1_{32}(z)=1+\mu_{31}\frac{z}{h_1},\quad B^2_{32}(z)=1+\mu_{32}\frac{z}{h_2},\tag{16}$$

$$B^1_{11}(r)=B^{10}_{11},\ldots B^2_{33}(r)=B^{20}_{33}$$

Здесь $\mu_1,\mu_2,\mu_{31},\mu_{32}$ - параметры неоднородности материала слоев пластинки.

С учетом (16) легко определяются жесткостные характеристики пластинки из (7):

$$b^{20}_{12}=h_2\left(1-\frac{\mu_2}{2}\right),\qquad b^{10}_{12}=h_2\left(1+\frac{\mu_1}{2}\right),$$

$$b^{21}_{12}=h_2^2\left(\frac{\mu_2}{3}-\frac{1}{2}\right),\qquad b^{11}_{12}=h_1^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_1}{3}\right),$$

$$b^{22}_{12}=h_2^3\left(\frac{1}{3}-\frac{\mu_4}{4}\right),\qquad b^{12}_{12}=h_1^3\left(\frac{1}{3}-\frac{\mu_1}{4}\right),$$

$$b^{20}_{22}=b^{20}_{12},\quad b^{21}_{22}=b^{21}_{12},\quad b^{22}_{22}=b^{22}_{12},$$

$$b^{10}_{22}=b^{10}_{12},\quad b^{11}_{22}=b^{11}_{12},\quad b^{12}_{22}=b^{12}_{12},$$

$$b^{20}_{32}=h_2\left(1-\frac{\mu_{32}}{2}\right),\quad b^{10}_{32}=h_1\left(1+\frac{\mu_{31}}{2}\right),$$

$$b^{21}_{32}=h_2^2\left(\frac{1}{3}-\frac{\mu_{32}}{4}\right),\quad b^{11}_{32}=h_1^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_{31}}{3}\right),\tag{17}$$

$$b^{22}_{33}=h_2^3\left(\frac{1}{3}-\frac{\mu_{32}}{4}\right),\quad b^{12}_{32}=h_1^3\left(\frac{1}{3}+\frac{\mu_{31}}{4}\right)$$

Если рассмотреть приближенную постановку задачи, при осесимметричной форме потери устойчивости уравнение устойчивости получается в виде:

$$A_{11}\frac{d^4w}{dr^4}+(2A_{11}-A_{12}-A_{21})\frac{1}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{A_{22}}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{A_{22}}{r^3}\frac{dw}{dr}+$$
$$+\sigma_r h\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=0.\tag{18}$$

Решение уравнения (18) будем строить методом Бубнова-Галеркина. В случае защемленных краев пластинки изогнутую поверхность можем представить в виде:

$$w=f\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2\tag{19}$$

Напишем уравнение метода Бубнова-Галеркина:

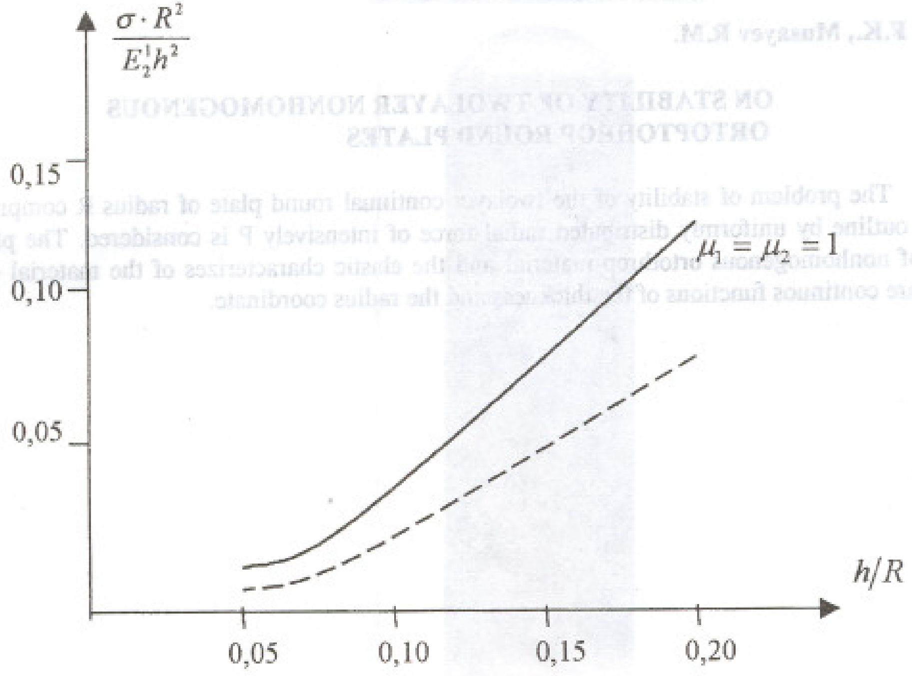
$$\int_0^R L\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^2 r\,dr=0\tag{20}$$

где через L(-) обозначена левая часть уравнения (18). С учетом (18)-(20) для определения критического давления получим формулу:

$$\sigma_\kappa h = \frac{2}{R^2}(9A_{11} + 3A_{12} - 3A_{21} - A_{22}) \qquad (21)$$

Здесь обобщенные жесткостью характеристистики $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ – с помощью формул (7),(13), (15) выражаются через параметры (17).

При конкретных значениях параметров произведены численные расчеты и результаты представлены на рис.1. Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной однородной задачи.



$E_r^2/E_r^1 = 0{,}9$; $E_\theta^2/E_\theta^1 = 0{,}8$; $\nu_r^2 = 0{,}03$; $\nu_\theta^1 = 0{,}035$; $\nu_r^2 = 0{,}27$; $\nu_\theta^2 = 0{,}25$; $\mu_{31} = \mu_{32} = 1$; $h_1/h_2 = 2/3$

Рис.1.

Литература

[1]. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* М.Наука, 1977, 416 с.

[2]. Королев В.И. *Упругопластические деформации оболочек* М. Машиностроение 1971, 304 с.

[3]. Алфутов Н.А. и др. *Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов* М. Машиностроение,1984, 264 с.

[4]. Крысько В.А., Бабенкова Т.В. *Колебания многослойных пластинок при некоторых видах краевых условий* В кн. Труды XVIII МК по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997, с. 11-18.

[5]. Исаев Ф.К., Мусаев Р.М. *Об устойчивости двухслойных неоднородных анизотропных пластинок* Труды ИММ АН Азербайджана, том VI(XIV),Баку, 1997, с. 218-222.