1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 531+539.3

МАМЕДОВ Э.А.

НОРМАЛЬНЫЙ УДАР ПО ГИБКОЙ УПРУГОЙ НИТИ

Поведение гибкой связи (нити) при ударе по ней твердым телом существенно зависит от формы ударяющего тела [1]. В данной статье рассматривается задача о нормальном ударе выпуклым многоугольным твердым телом с постоянной скоростью по гибкой линейно упругой нити (рис. 1).

§1. Пусть по бесконечно длинной гибкой линейно-упругой, прямолинейной, ненапряженной нити производится нормальный удар жестким телом, представленным на рис.1.

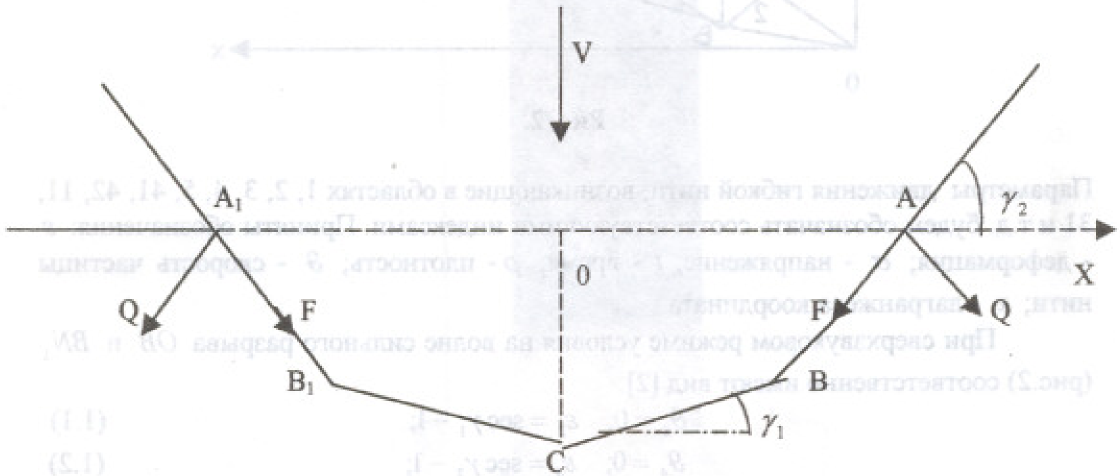

Рис. 1

Предполагается, что скорость удара V, углы γ_1, γ_2 таковы, что после удара прогибная часть нити облегает поверхность ударяющего тела. Так же предполагается, что соударение происходит в точке C и поведение нити относительно точки C симметричное. Принимается, что скорость точки излома нити больше скорости упругой волны нити, т.е. $b_1 = Vctg\gamma_1 \geq Vctg\gamma_2 > a_0$. Здесь γ_1, γ_2 - углы между первоначальным положением нити и щеки ударяющего тела CB и BA соответственно; $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ - скорость упругой волны в нити; b_1, b_2 - скорости точки излома нити в области CB и BA соответственно. Длину CB обозначим L. B, B_1 являются точками стационарных разрывов, а движения нити относительно этих разрывов принимаются как движения через неподвижные блоки. При этом когда фронт волны сильного разрыва, распространяющегося по щеке CB (и CB_1) встречает точку B (точку B_1), то слева от точки B (B_1) распространяется отраженная упругая волна с фронтом 2-3, а справа от точки B

распространяется упругая волна с фронтом BN_2. При этом скорость упругой волны меньше скорости волны сильного разрыва $BN_1(a_0 < b_2 = Vctg\gamma_2)$. Волновая картина движения нити после удара в плоскости x, t показано на рис.2.

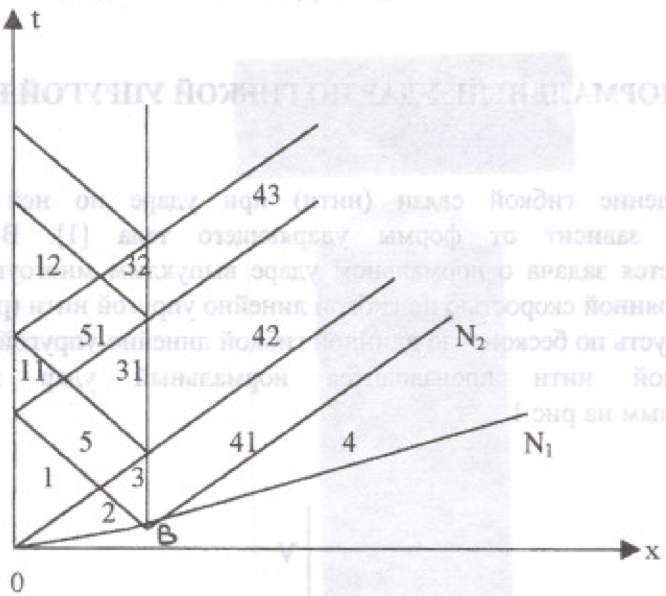

Рис. 2.

Параметры движения гибкой нити, возникающие в областях 1, 2, 3, 4, 5, 41, 42, 11, 31 и т.д. будем обозначать соответствующими индексами. Приняты обозначения: ε - деформация; σ - напряжение; t - время; ρ - плотность; ϑ - скорость частицы нити; x - лагранжева координата.

При сверхзвуковом режиме условия на волне сильного разрыва OB и BN_1 (рис.2) соответственно имеют вид [2]

$$\vartheta_2 = 0; \quad \varepsilon_2 = \sec\gamma_1 - 1; \tag{1.1}$$

$$\vartheta_4 = 0; \quad \varepsilon_4 = \sec\gamma_2 - 1; \tag{1.2}$$

для первого режима при $F = \mu_* Q$;

$$\vartheta_2 = b_1(\sec\gamma_1 - 1 - \varepsilon_2); \quad b_1 = Vctg\gamma_1; \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{M^2}{M^2 - tg^2\gamma_1}\left(tg\gamma_* - tg\frac{\gamma_1}{2}\right)\sin\gamma_1; \quad M = \frac{V}{a_0};$$

$$\vartheta_4 = b_2(\sec\gamma_2 - 1 - \varepsilon_2); \quad b_2 = Vctg\gamma_2; \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{M^2}{M^2 - tg^2\gamma_2}\left(tg\gamma_* - tg\frac{\gamma_2}{2}\right)\sin\gamma_2; \quad M_* = tg\gamma_*;$$

для второго режима при $F = \mu_* Q$; $\gamma_i < 2\gamma_*$. Здесь $i = 1,2$; M_* - коэффициент кулонова трения в точке излома соответственно.

Так как поведение нити относительно точки C (ось $0t$) одинаково, будем исследовать задачу в правой части нити от точки C (рис.2), т.е. в плоскости $x0t\,(x \geq 0; t > 0)$.

В точке удара, т.е. при $x = 0$ за симметрией скорость частицы нити равна нулю

$$\vartheta_1 = 0 \tag{1.5}$$

В рассматриваемой задаче определяющие параметры являются постоянными. Трения между поверхностью ударяющего тела и нитью не учитываются.

§ 2. Так как исследуется сверхзвуковой режим движения, то параметры в области 2 и 4 известные, т.е. $\vartheta_2, \varepsilon_2, \vartheta_4, \varepsilon_4$ известны из формулы (1.1) -(1.4).

Параметры в области 1 определяются из условия на фронте 1-2 и из (1.5).

На фронте упругой волны 1-2 имеем

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = a_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \tag{2.1}$$

С учетом (1.5) из (2.1) определим ε_1 в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \frac{\vartheta_2}{a_0} \tag{2.2}$$

Из условия на фронте отраженной упругой волны 2-3 и на фронте упругой волны 41-4 имеем

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = -a_0(\varepsilon_3 - \varepsilon_2); \tag{2.3}$$

$$\vartheta_{41} - \vartheta_4 = a_0(\varepsilon_4 - \varepsilon_{41}); \tag{2.4}$$

Кроме того, в точке B удовлетворяется условие непрерывности деформации, т.е.

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{41} \tag{2.5}$$

и кинематическое условие

$$\vartheta_3 = \vartheta_{41} \cos\gamma_3; \quad \gamma_3 = \gamma_2 - \gamma_1 \tag{2.6}$$

Из системы (2.3)-(2.6) находим $\vartheta_3, \varepsilon_3, \vartheta_{41}, \varepsilon_{41}$ в виде

$$\begin{gathered} \vartheta_3 = \frac{1}{1+\sec\gamma_3}\left[\vartheta_2 + \vartheta_4 + a_0(\varepsilon_4 - \varepsilon_2)\right]; \\ \vartheta_{41} = \vartheta_3 \sec\gamma_3; \quad \varepsilon_{41} = \varepsilon_3; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{1+\sec\gamma_3}\left[\frac{\vartheta_4}{a_0} + \varepsilon_4 - \left(\frac{\vartheta_2}{a_0} - \varepsilon_2\right)\sec\gamma_3\right] \end{gathered} \tag{2.7}$$

Из условия на фронте отраженной упругой волны 1-5 и на фронте упругой волны 5-3 имеем

$$\begin{gathered} \vartheta_1 - \vartheta_5 = -a_0(\varepsilon_5 - \varepsilon_1) \\ \vartheta_5 - \vartheta_3 = a_0(\varepsilon_3 - \varepsilon_5) \end{gathered} \tag{2.8}$$

учитывая (1.5) в (2.8), $\varepsilon_5, \vartheta_5$ определим в виде

$$\begin{gathered} \vartheta_5 = \frac{1}{2}(\vartheta_3 + a_0\varepsilon_3 - a_0\varepsilon_1); \\ \varepsilon_5 = \frac{1}{2a_0}(\vartheta_3 + a_0\varepsilon_3 + a_0\varepsilon_1) \end{gathered} \tag{2.9}$$

В момент времени $t = t_1 = \dfrac{L}{a_0} + \dfrac{L}{b_1}$ в точке удара $x = 0$ встречаются отраженные упругие волны 1-5 (рис.2). Далее при многократных отражениях упругих волн и взаимодействии упругой волны со стационарным разрывом B возникают новые области 11, 31, 51, 42 и т.д.

Из условия непрерывности смещение на фронте 11-5

$$\vartheta_{11} - \vartheta_5 = a_0(\varepsilon_5 - \varepsilon_{11}) \tag{2.10}$$

определим ε_{11} в виде

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_5 + \frac{\vartheta_5}{a_0}; \ (\vartheta_{11} = 0) \tag{2.11}$$

где $\vartheta_{11} = 0$ из условия симметрии в точке $x = 0$.

Условия на фронтах 5-31, 42-41 и в точке B следующие

$$\begin{aligned} &\vartheta_5 - \vartheta_{31} = -a_0(\varepsilon_{31} - \varepsilon_5); \\ &\vartheta_{42} - \vartheta_{41} = a_0(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{42}); \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{42}; \tag{2.13}$$

$$\vartheta_{31} = \vartheta_{42} \cos\gamma_3 \tag{2.14}$$

Из системы (2.12)-(2.14) $\varepsilon_{42}, \vartheta_{42}, \varepsilon_{31}, \vartheta_{31}$ определяются в виде

$$\varepsilon_{42} = \frac{1}{1+\cos\gamma_3}\left[\left(\frac{\vartheta_{41}}{a_0} + \varepsilon_{41}\right)\cos\gamma_3 + \varepsilon_5 - \frac{\vartheta_5}{a_0}\right] \tag{2.15}$$

$$\vartheta_{42} = \frac{1}{1+\cos\gamma_3}\left[\vartheta_{41} + a_0\varepsilon_{41} + \vartheta_5 - a_0\varepsilon_5\right]; \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{42}; \quad \vartheta_{31} = \vartheta_{42}\cos\gamma_3 \tag{2.17}$$

Параметры $\vartheta_{51}, \varepsilon_{51}$ определяются из условия на фронтах 51-31, 11-51

$$\begin{aligned} &\vartheta_{51} - \vartheta_{31} = a_0(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{51}); \\ &\vartheta_{51} - \vartheta_{11} = -a_0(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{51}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} &\vartheta_{51} = \frac{1}{2}(\vartheta_{31} + a_0\varepsilon_{11} - a_0\varepsilon_{11}); \\ &\varepsilon_{51} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{31}}{a_0} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{11}\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь учтено, что $\vartheta_{11} = 0$.

Таким образом, можно определить все параметры в новых областях, возникающих вследствие многократных отражений упругих волн.

§ 3. Пусть при определенных комбинациях исходных параметров задачи в точке удара возникает предельное напряжение $\sigma = \sigma_{пр}$ ($\sigma_{пр}$ - прочность на разрыв материала нити) и при $t = 0$ происходит обрыв нити в точке $x = 0$. При этом принимается, что геометрическая схема движения (схема с облеганием прогибной части нити к поверхности ударяющего тела) сохраняется. При этом решение задачи нужно построить с условием в точке обрыва [2]

$$\sigma = 0 \quad (\varepsilon = 0) \tag{3.1}$$

Условие (3.1) выражает возникновение обрыва нити в точке ее контакта с вершиной ударяющего тела (точкой C). При этом волновая схема движения в плоскости x, t (рис.2) сохраняется, но нужно принимать, что в точке $x = 0$ всегда $\sigma = 0 \quad (\varepsilon = 0)$.

Параметры задачи в области 1 можно определить из (2.1) с учетом $\varepsilon_1 = 0$ в виде

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + a_0\varepsilon_2 \tag{3.2}$$

Скорость частицы ϑ_{11} в области 11 определяется из (2.10) в виде

$$\vartheta_{11} = \vartheta_5 + a_0\varepsilon_5 \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_{11} = 0$ на основе (3.1).

Таким образом можно определить все параметры задачи в каждой области с учетом (3.1), (3.2), (3.5) при обрыве нити в точке удара.

Литература

[1]. Рахматулин Х.А., Демьяненко Ю.А. *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.* М.: Физматгиз., 1961, 399 с.
[2]. Муталлимов Ш.М. *Некоторые задачи волновой динамики гибких связей при ударе твердым телом.* Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук, Новосибирск, 1987, 32 с.