УДК 531+539.3

МУТАЛЛИМОВ К.Ш.

УДАР КЛИНОМ ПО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ГИБКОЙ НИТИ С УЧЕТОМ ДАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ (СВЕРХЗВУКОВОЙ РЕЖИМ)

В работе решаются задачи о нормальном ударе шероховатым жестким клином с постоянной скоростью V по гибкой нити, подчиняющейся упрогопластическому закону. Прогибная часть нити облегает щеку клина, элементы нити прижимаются к клину внешним давлением P [2], а скорость волны сильного разрыва больше скорости упругой волны нити. Давление P постоянное и направлено нормально к нити [2].

§1. Уравнение движения гибкой нити в области облегания, т.е. в области от точки удара до фронта волны сильного разрыва $(0 \le x < Vctg\gamma)$ будет [1,2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \mu \frac{PL}{F_0}(1+\varepsilon)\nu_0 \tag{1.1}$$

$$(0 < x < Vctg\gamma).$$

Если поведение нити подчиняется упругопластическому закону

$$\sigma = (E - E_1)\varepsilon_s + E_1\varepsilon , \tag{1.2}$$

то уравнение движения (1.1) примет вид

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{PL}{F_0 E_1}(1+\varepsilon)\nu_0 \tag{1.3}$$

а если поведение нити подчиняется упругому закону

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.4}$$

то уравнение (1.1) будет

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{dx^2} - \mu \frac{PL}{F_0 E}(1+\varepsilon)\nu_0 \tag{1.5}$$

Здесь u, x - эйлеровы и лагранжевы координаты частицы нити; F_0 - площадь поперечного сечения нити до удара; L - часть периметра сечения нити, контактирующая с клином; $a_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ - скорость упругой волны; $a_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho}}$ - скорость пластической волны; t - время; $\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x} - 1$ - деформации нити; σ - напряжение; μ - коэффициент трения; E_1, ε_s - динамические значения модуля упрочнения и деформации на предел упругости; E - модуль Юнга; $\nu_0 = sign\dfrac{\partial u}{\partial t}$ - при покое принимает любое значение в отрезке [-1;1] и при движении совпадает со знаком скорости частицы нити.

§2. Пусть при некоторых комбинациях параметров задачи в точке излома $(x = vtctg\gamma)$ нить находится в пластическом состоянии. При этом для сверхзвукового режима движения условия в точке излома будут [3]

$$\varepsilon^0 = \frac{b^2}{b^2 - a_1^2}\left[\sin\gamma\left(tg\gamma_* - tg\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\varepsilon_s\left(a_0^2 - a_1^2\right)}{b^2}\right];$$

$$\vartheta^0 = b\left(\sec\gamma - 1 - \varepsilon^0\right); \quad \sigma^0 > 0 \tag{2.1}$$

$$b = Vctg\gamma,$$

для второго режима $\gamma < 2\gamma_*$:

$$\varepsilon^0 = \sin\gamma\left(tg\gamma_* - tg\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$\vartheta^0 = Vb\left(tg\gamma - tg\gamma_*\right); \quad \sigma^0 = 0 \tag{2.2}$$

для третьего режима $\gamma > 2\gamma_*$.

Здесь $tg\gamma_* = \mu_*$ - коэффициент трения в точке излома; $\varepsilon^0, \vartheta^0, \sigma^0$ - значение деформации, скорость частицы $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \vartheta\right)$ и напряжение; γ - угол между щекой клина и начальным направлением нити.

Имеем также условие в точке удара

$$U(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{2.3}$$

В том случае решение задачи нужно определить в области $a_1 t \le x < bt$ от фронта пластической волны до волны сильного разрыва и в области $0 < x \le a_1 t$ - от точки удара до фронта пластической волны. Уравнение движения (1.3) имеет место в области от точки удара до фронта волны сильного разрыва $(0 < x < bt)$.

Для получения решения уравнение (1.3) функцию $U(x,t)$ представим в виде разложения по параметру $\mu(\mu < 1)$

$$U = U^{(0)} + \mu U^{(1)} + \mu^1 U^{(2)} + \ldots \tag{2.4}$$

Ограничимся двумя членами в правой части (2.4) т.е.

$$U = U^{(0)} + \mu U^{(1)}, \tag{2.5}$$

где

$$U^{(0)} = \left(1 + \varepsilon_1^0\right)x + \vartheta_1^0 t;$$

$$U^{(1)} = a_{12}\left(x - a_1 t\right)^2 + b_{12}\left(x + a_1 t\right)^2 + \frac{P_2}{4}\left(1 + \varepsilon_1^0\right)\left(x^2 - a_1^2 t^2\right);$$

$$P_2 = \frac{PL}{F_0 E_1} \tag{2.6}$$

Здесь $U^{(0)}$ - решение автомодельной задачи $(P = 0)$; $\varepsilon_1^0, \vartheta_1^0, a_{12}, b_{12}$ - неизвестные пока константы.

Пусть в точке излома имеет место условие (2.1). Подставляя (2.5), (2.6) в условия (2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, определим константы $\varepsilon_1^0, \vartheta_1^0, a_{12}, b_{12}$ в виде

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon^0;\ \vartheta_1^0 = \vartheta^0;$$

$$a_{12} = -\frac{P_2}{8}\left(1+\varepsilon_1^0\right)\frac{\lambda+1}{\lambda-1};\ b_{12} = -\frac{P_2}{8}\left(1+\varepsilon_1^0\right)\frac{\lambda-1}{\lambda+1}; \tag{2.7}$$

$$\lambda = ba_1^{-1}$$

Деформация, скорость частиц и напряжения в области $a_1 t \le x < bt$ выражаются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \mu P_2 \frac{bt-x}{\lambda^2-1}\left(1+\varepsilon^0\right);$$

$$\vartheta = \vartheta^0 + \mu P_2 \frac{bt-x}{\lambda^2-1}b\left(1+\varepsilon^0\right); \tag{2.8}$$

$$\sigma = \rho a_1^2\left[\left(\lambda^2-1\right)\varepsilon_s + \varepsilon^0 + \mu P_2 \frac{bt-x}{\lambda^2-1}\left(1+\varepsilon^0\right)\right]$$

$$\nu_0 = +1$$

Таким же образом можно построить решение в области $0 < x < a_1 t$ и в результате получается, что $\vartheta > 0$ при $\nu_0 = -1$ и $\vartheta < 0$ при $\nu_0 = +1$. Эту противоречивость можно снять, если принять ϑ всюду в области $0 \le x < a_1 t$ равной нулю. При этом деформация за фронтом $x = a_1 t$ определяется из условия

$$[\vartheta] = a_1[\varepsilon] \tag{2.9}$$

Здесь и далее квадратные скобки означают скачок величины, стоящей в скобках. Учитывая $\vartheta = 0$ (в области $0 \le x < a_1 t$) и формулы (2.8), то ε в области $0 \le x < a_1 t$ определяются из (2.9) в виде

$$\varepsilon = \vartheta a_1^{-1} + \varepsilon^0 - \mu P_2 \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1+\varepsilon^0\right)x \tag{2.10}$$

Из (1.2) определим σ (с учетом 2.10)

$$\sigma = \rho a_1^2\left[\left(\lambda^2-1\right)\varepsilon_s + \varepsilon^0 + \mu P_2 \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\left(1+\varepsilon^0\right)x\right] \tag{2.11}$$

Таким образом, при отсутствии движения за фронтом $x = a_1 t$, уравнение (1.1) переходит в уравнение равновесия

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \mu\frac{PL}{F_0}(1+\varepsilon)\nu_0 = 0 \tag{2.12}$$

Отметим, что (2.12) служит для определения значения ν_0 и учитывая (2.11) в (2.12) найдем ν_0 в виде

$$\nu_0 = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1+\varepsilon^0}{1+\varepsilon_{02}};\ |\nu_0| < 1; \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{02} = \left(\lambda^2-1\right)\left(1-\varepsilon_s\right) + \frac{\vartheta^0}{a_1}.$$

Из (2.13) следует, что ν_0 принимает допустимое значение. Также отметим, что решение (2.8) имеет место до линии

$$x = bt - k_0;\ \ k_0 = \frac{\vartheta^0}{b}\frac{\lambda^2-1}{\mu P_2\left(1+\varepsilon^0\right)}, \tag{2.14}$$

вдоль которой скорость ϑ обращается в нуль (ϑ=0). Следовательно, выше линии (2.14) и ниже характеристикой $x = a_1 t$ и согласно (2.14), $\varepsilon, \sigma, \vartheta$ определяются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \frac{\vartheta^0}{b}; \quad (\vartheta = 0);$$

$$\sigma = \rho a_1^2 \left[\left(\lambda^2 - 1 \right) \varepsilon_s + \varepsilon^0 + \frac{\vartheta_0}{b} \right] \tag{2.15}$$

Из полученных результатов следует, что фронт пластической волны $x = a_1 t$ является ударным фронтом остановки движения. Линии (2.14) и $x = a_1 t$ пересекаются в некоторой точке.

Пусть в точке излома $x = Vt ctg\gamma$ имет условия (2.2) $\varepsilon^0 < 0, \vartheta > 0$, т.е. за фронтом волны сильного разрыва нить сморщена. Тогда в плоскости (ε, σ) в точку $\left(\varepsilon^0, 0 \right)$ $\left(\sigma^0 = 0 \right)$ можно попасть, от точки $\left(\varepsilon_s, \sigma_s \right)$ или от точки $\left(\varepsilon_0, \sigma_0 \right)$. Здесь $\left(\varepsilon_0, \sigma_0 \right)$ точка на диаграмме (1.2), причем $\varepsilon_0 > \varepsilon_s; \sigma_0 > \sigma_s$. Сначала рассмотрим случай, когда в точку $\left(\varepsilon^0, 0 \right)$ можно попасть от точки $\left(\varepsilon_s, \sigma_s \right)$. При этом нить скачкообразно через фронт расправления a_s, приобретает за этим фронтом значение деформации и напряжения ε_s, τ_s соответственно.

Из условия на фронте расправления $x = a_s t$

$$\begin{aligned} &\sigma_s - \sigma^0 = \rho a_s \left(\vartheta^0 - \vartheta_s \right); \\ &\vartheta^0 - \vartheta_s = a_s \left(\varepsilon_s - \varepsilon^0 \right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

с учетом $\sigma^0 = 0$ определяется скорость расправления a_s в виде

$$a_s = \sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho \left(\varepsilon_s - \varepsilon^0 \right)}}; \quad \left(\varepsilon^0 < 0 \right) \tag{2.17}$$

Здесь $\varepsilon^0, \vartheta^0$ выражаются формулами (2.2). Кроме этого, решение задачи нужно определять в области $0 \le x < a_1 t$ и $a_1 t \le x a_s t$.

Определим решения задачи в области $a_1 t \le x < a_s t$, для этого решение уравнения (1.3) представим в виде (2.5), (2.6).

Для определения констант $\varepsilon_1^0, \vartheta_1^0, a_{12}, b_{12}$ имеются условия

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - 1 = \varepsilon_s, \quad x = a_1 t \tag{2.18}$$

$$U = \left(1 + \varepsilon^0 \right) x + \vartheta^0 t, \quad x = a_s t \tag{2.19}$$

Подставляя (2.5), (2.6) в условиях (2.18), (2.19) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, найдем неизвестные константы, далее $\varepsilon, \vartheta, \sigma$ определяются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \mu \frac{\overline{P}_2}{1 - \beta^2} \left(a_s t - x \right);$$

$$\vartheta = \vartheta_s - \mu \frac{\overline{P}_2}{1 - \beta^2} a_1 \left(a_s t - x \right); \tag{2.20}$$

$$\sigma = \sigma_s + \mu\rho a_1^2 \overline{P}_2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2}(a_s t - x),$$

где

$$\vartheta_s = \vartheta^0 - \frac{\sigma_s}{\rho a_s}; \quad \beta = \frac{a_1}{a_s}; \quad \nu_0 = +1$$

$$\overline{P}_2 = \frac{PL}{F_0 E_1}(1+\varepsilon_s) \tag{2.21}$$

Из (2.20) следует, что это решение имеет место лишь вплоть до линии

$$x = a_s t - k_1; \quad k_1 = \frac{\vartheta_s(1-\beta^2)}{\mu \overline{P}_2 \beta a_1} \tag{2.22}$$

вдоль которой скорость ϑ обращается в нуль, и $\vartheta = 0$ в угле между прямой (2.22) и характеристикой $x = a_1 t$. Деформация, напряжение σ согласно (2.22) в этом угле определяются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \frac{\vartheta_s}{a_1}; \tag{2.23}$$

$$\sigma = \sigma_s + \rho a_1 \vartheta_s; \quad \nu_0 = 0$$

Отметим, что прямая (2.22) и $x = a_1 t$ пересекаются в одной точке.

Вышеуказанным способом можно решить задачу в области $0 \le x < a_1 t$ и получается, что скорость ϑ в этой области принимает отрицательные значения. Эту противоречивость можно снять если положить всюду в области $0 \le x < a_1 t$, ϑ=0. Напряжение в области $0 \le x < a_1 t$ определяется из закона изменения количества движения

$$[\sigma] = \rho a_2 [\vartheta]. \tag{2.24}$$

Учитывая (2.20) в (2.24) напряжения в области $0 \le x < a_1 t$ выражается в виде

$$\sigma = \rho a_1 \vartheta_s + \sigma_s - \rho a_1^2 \mu \overline{P}_2 \frac{1-\beta}{1+\beta} x, \tag{2.25}$$

$(\vartheta = 0)$.

Деформация в этой области определяется из (1.2) (с учетом (2.25)). Далее, подставляя (2.25) в (2.12), определим ν_0 в виде

$$\nu_0 = -\frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{1+\varepsilon_s}{1+\varepsilon_{3s}}; \quad |\nu_0| < 1 \tag{2.26}$$

$$\varepsilon_{3s} = \varepsilon_s + \frac{\vartheta_s}{a_1}$$

Теперь обратимся к построению решения задачи, когда за точкой излома возникает сморщивание, но в точку $\varepsilon^0, 0$ попадает точка $(\varepsilon_0, \sigma_0)$. В этом случае граница раздела области со сморщиванием к области, примыкающей к вершине клина, где нить вновь растянута, будем определять в виде

$$x = x_*(t) = \omega_0 t + \mu\omega_1 t^2, \tag{2.27}$$

где ω_0, ω_1 - неизвестные пока постоянные.

На фронте $x = x_*(t)$ имеем условия

$$[\sigma] = \rho\dot{x}_*(t)[\vartheta];$$
$$[\vartheta] = \dot{x}_*(t)[\varepsilon]. \tag{2.28}$$

Здесь $\dot{x}_*(t)$ - скорость границы раздела.

Для определения решения задачи в области $0 \le x < x_*(t)$, решение уравнения (1.3) представим в виде (2.5), (2.6). Далее, учитывая (2.5), (2.6), (2.27) в условиях (2.3), (2.28), легко можно определить все неизвестные параметры и в результате $\varepsilon, \sigma, \vartheta$ в области $0 \le x < x_*(t)$ выражаются в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_s - \frac{\sigma_s}{\rho a_1^2} + \frac{\omega_0 \vartheta^0}{a_1^2}; \tag{2.29}$$
$$\vartheta = 0;\ v_0 = 0;\ \omega_1 = 0;$$
$$\sigma = \rho\vartheta^0\omega^0; \tag{2.30}$$
$$\omega_0 = a_1\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 + 1}\right);\ a_2 = \frac{\varepsilon^0 a_1}{2\vartheta^0};$$

Из (2.29), (2.30) следует, что в этом случае поведение нити соответствует случаю автомодельной задачи, т.е. в этом случае автомодельной задачи, т.е. в этом случае давление внешней среды никак не влияет на поведение нити.

Таким образом установлено, что при сверхзвуковом режиме движения в области облегчения в нити после некоторого момента времени возникают новые фронты слабого разрыва. Выше этих фронтов движение нити прекращается, а напряжение и деформации принимают постоянные значения. Напряжение нити в области, примыкающей к вершине клина, снижается на величину пропорциональную силе трения (см. (2.11), (2.25)). Из формулы (2.11), (2.25) также следует, что напряжение в точке удара $(x = 0)$ больше, чем в области $0 < x < a_1 t$. Следовательно, обрыв нити может произойти в точке удара $(x = 0)$.

В заключении автор выражает искренюю благодарность проф. М.Ф.Мехтиеву за постановку задачи и ценные советы.

Литература

[1]. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.* М.: Физматгиз., 1961, с.399

[2]. Мехтиев М.Ф., Муталлимов К.Ш. *Попереный удар клином по упругопластической нити при наличии трения.* Труды ИММ АН Азербайджана, т.V(XIII), Баку, 1996, с.124-127.

[3]. Муталлимов Ш.М. *Некоторые задачи волновой динамики гибких связей при ударе твердым телом.* Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук, Новосибирск, 1987, с.32.