1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 534.222

РАМАЗАНОВ Т.К., КУРБАНОВ А.И.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИ ДВУХФАЗНОМ НАСЫЩЕНИИ

Построена математическая модель эволюции нелинейных волн в пористой среде при двухфазном заполнении пор. Учет закона деформирования реологически сложной твердой фазы и капилярных взаимодействий жидких фаз приводит к обобщению уравнения эволюции с нелинейностью Кортвега-де-Вриза и диффузионного типа (КдВД), ранее полученное авторами.

Полная сумма уравнений насыщенной пористой среды при двухфазном насыщении решена методом малого параметра. В первом приближении полученное дисперсионное соотношение показывает, что возмущение переносится тремя отдельными линейными волнами с разрывными скоростями. Во втором приближении выводится нелинейное уравнение эволюции (КдВД). Численно-аналитическим методом исследуется влияние параметров задачи, капилярного давления и межфазных сопротивлений на формирование и распространение фронта возмущения при импульсном воздействии. Оказывается, что нелинейные волны наблюдаются непосредственно вокруг очаговой зоны и их трансляции на расстояниях зависит от физико-механических свойств твердой фазы скелета и наполнителя пор, межфазных сопротивлений.

Вибрационные или импульсные воздействия на нефтяной пласт приводит к увеличению его упругого запаса, в результате чего повышение пластового давления положительно влияет на конечную нефтеотдачу пласта. Эксперименты [1] показывают, что при циклическом заводнении степень удержания малопроницаемыми частями пласта нефти кливнедрившейся в них воды зависит от продолжительности циклов и их частоты, содержания остаточной воды, значения фильтрационных и капилярных сил. Эффективное вибрационное воздействие заставляют защемленные диспергированные капли в поровом пространстве кластеризоваться [2] или дробится [3] на части и уносятся водным потоком. С одной стороны, насыщенная пористая среда является хорошим фильтром [4,5] преобразующим любой сейсмический сигнал (импульс) в бегущие волны. С другой стороны, нелинейные волны несут с собой больше информации о микроструктурах среды, чем либо других [6-9].

1. Рассмотрим одномерное распространение волн при равномерном возмущении насыщенной пористой среды. Уравнение баланса масс и импульса для каждой фазы насыщенных пористых сред имеют вид [5]:

$$\frac{\partial \rho_i \left[(1-a)\delta_{1i} + a(\delta_{2i} + \delta_{3i})\right]\left[\delta_{1i} + \theta\delta_{2i} + (1-\theta)\delta_{3i}\right]}{\partial t} +$$

$$+\frac{\partial \rho_i v_i \left[(1-\alpha)\delta_{1i} + a(\delta_{2i}+\delta_{3i})\right]\left[\delta_{1i} + \theta\delta_{2i} + (1-\theta)\delta_{3i}\right]}{\partial x} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_i v_i \left[(1-\alpha)\delta_{1i} + a(\delta_{2i}+\delta_{3i})\right]\left[\delta_{1i} + \theta\delta_{2i} + (1-\theta)\delta_{3i}\right]}{\partial t} +$$

$$\frac{\partial \rho_i v_i v_i \left[(1-\alpha)\delta_{1i} + a(\delta_{2i}+\delta_{3i})\right]\left[\delta_{1i} + \theta\delta_{2i} + (1-\theta)\delta_{3i}\right]}{\partial x} =$$

$$= \delta_{1i}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \delta_{1i}(1-\alpha)\frac{\partial\left(\theta P_2 + (1-\theta)P_3\right)}{\partial x} + \delta_{1i} a\left(P_2 - P_3\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \qquad (1.2)$$

$$+\left(\delta_{2i}a + \delta_{3i}a\right)\left[\theta\delta_{2i} + (1-\theta)\delta_{3i}\right]\frac{\partial P_1}{\partial x} + \sum_{j=1}^{3} R_{ij};\ i \neq j$$

Деформация матрицы при ее двухфазном насыщении описываются феноменологическим соотношением [6,10]

$$b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i^0 \frac{D^i}{Dt^i}\left\{\sigma + \gamma\left[P_3 + \theta(P_2 - P_3)\right] + \gamma_1 P_c(\theta) + (1-\gamma)P_c(\theta_0)(\theta - \theta_0)\right\} =$$

$$= \left(a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i^0 \frac{D^i}{Dt^i}\right)e_1; \qquad (1.3)$$

Разность фазовых давлений в порах должна удовлетворить соотношение [5]

$$P_3 - P_2 = P_c(\theta) \qquad (1.4)$$

Уравнения (1.1) и (1.4) дополняются тремя термодинамическими соотношениями

$$\rho_1 = \rho_1(\sigma, P_2, P_3),\ \ \rho_2 = \rho_2(P_2),\ \ \rho_3 = \rho_3(P_3) \qquad (1.5)$$

и замыкаются кинематическим соотношением

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial e_1}{\partial x}v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x},\ \frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1 e_1}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial x}. \qquad (1.6)$$

Здесь $i = 1$ - относится к твердой фазе, $i = 2,3$ - к первой и второй жидким фазам в порах; $\rho_1, \rho_2, \rho_3, v_1, v_2, v_3$ - соответственно средние плотности, скорости твердой и жидких фаз, α, θ - пористости среды и объемной фазовой концентрации первой жидкой фазы, $R_{ij} = -R_{ji}$ - силы взаимодействия между фазами, σ - полное и эффективное напряжение при двухфазном насыщении пористой среды: $\sigma = \Gamma - \left[\theta P_2 + (1-\theta)P_3\right]$, $\theta P_2 + (1-\theta)P_3$ полное давление в жидкой фазе, Γ - полное горное давление, $a_0, a_1^0, \ldots, a_m^0; b_0^0, b_1^0, \ldots, b_n^0$ - постоянные коэффициенты, которые определяют из конкретных упруговязких моделей, $P_c(\theta)$ - равновесное капилярное давление, e_1 - деформация твердой фазы, $\gamma = (1-\alpha)\beta_1 K$ - жесткость (сцементированность) матрицы, γ_1 - коэффициент набухания $(\gamma_1 < 0)$ или усадки $(\gamma_1 > 0), \delta_{ij}$ - единичный тензор.

Система уравнений (1.1)-(1.6) соответствует взаимопроникающему изотермическому движению трех сплошных сред и являются замкнутой относительно неизвестных переменных $v_1, \rho_i, P_i, \sigma, a, e_1$. На основе термодинамики необратимых процессов силы межфазного сопротивления определяют отностительно скорости движения фаз [6]

$$R_{ij} = (v_i - v_j) f_{ij}\left(\left|\overline{v}_i - \overline{v}_j\right|\right) \tag{1.7}$$

Известно, что в нелинейных задачах в отличии от линеаризированных входной импульс изменяет свою форму с расстоянием. Если форма переменных функций медленно изменяется по пространству, то вводя малый параметр $\eta \ll 1$ решение можно искать в виде [6,10]

$$\begin{gathered} v_i = v_i(x,\tau), \rho_i = \rho_i(x,\tau), \alpha = \alpha(x,\tau), \ldots \\ x = \eta x, \tau = t - c^{-1}x \end{gathered} \tag{1.8}$$

В новых переменных уравнения (1.1), (1.2), (1.3), и (1.4) прмут вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\rho_1(1-\alpha))}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_1 v_1(1-\alpha))}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_1 v_1(1-\alpha))}{\partial\tau} = 0, \\
\frac{\partial(\rho_2\theta\alpha)}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_2 v_2\theta\alpha)}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_2 v_2\theta\alpha)}{\partial\tau} = 0, \\
\frac{\partial(\rho_3\alpha(1-\theta))}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_3 v_3\alpha(1-\theta))}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_3 v_3\alpha(1-\theta))}{\partial\tau} = 0, \\
\frac{\partial(\rho_1 v_1(1-\alpha))}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_1 v_1 v_1(1-\alpha))}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_1 v_1 v_1(1-\alpha))}{\partial\tau} = \\
= \eta\frac{\partial\sigma}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \eta(1-\alpha)\frac{\partial(\theta P_2 + (1-\theta)P_3)}{\partial x} - \\
- c^{-1}(1-\alpha)\frac{\partial(\theta P_2 + (1-\theta)P_3)}{\partial\tau} + \eta\alpha(P_2 - P_3)\frac{\partial\theta}{\partial x} - c^{-1}\alpha(P_2 - P_3)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \\
+ (v_1 - v_2) f_{12}\left(\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\right|\right) + (v_1 - v_3) f_{13}\left(\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_3\right|\right), \\
\frac{\partial(\rho_2 v_2\alpha\theta)}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_2 v_2 v_2\alpha\theta)}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_2 v_2\alpha\theta)}{\partial\tau} = \\
= \eta\alpha\theta\frac{\partial P_2}{\partial x} - c^{-1}\alpha\theta\frac{\partial P_2}{\partial\tau} - (v_1 - v_2) f_{12}\left(\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\right|\right) + (v_1 - v_3) f_{23}\left(\left|\overline{v}_2 - \overline{v}_3\right|\right), \\
\frac{\partial(\rho_3 v_3(1-\theta))}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial(\rho_3 v_3 v_3\alpha(1-\theta))}{\partial x} - c^{-1}\frac{\partial(\rho_3 v_3 v_3\alpha(1-\theta))}{\partial\tau} = \\
= \eta\alpha(1-\theta)\frac{\partial P_3}{\partial\tau} - c^{-1}\alpha(1-\theta)\frac{\partial P_3}{\partial\tau} - (v_1 - v_3) f_{13}\left(\left|\overline{v}_1 - \overline{v}_3\right|\right) - (v_2 - v_3) f_{23}\left(\left|\overline{v}_2 - \overline{v}_3\right|\right),
\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\left[b_0+\sum_{i=1}^{n} b_1 \prod_{q}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}-\eta v_1 \frac{\partial}{\partial x}-c^{-1} v_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{q}\right]\left[\sigma+\gamma\left(P_3+\theta\left(P_2-P_3\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\gamma_1 P_c(\theta)+(1-\gamma) P_c\left(\theta^{(0)}\right)\right]=\left[\alpha_0+\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 \prod_{q=1}^{i}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}-\eta v_1 \frac{\partial}{\partial x}-c^{-1} v_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{q}\right] e_1,$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \tau}+\eta v_1 \frac{\partial e_1}{\partial x}-c^{-1} v_1 \frac{\partial e_1}{\partial \tau}=\eta \frac{\partial v_1}{\partial x}-c^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial \tau}$$

Ищем решение системы уравнений (1.4), (1.5) и (1.9) в виде разложений в ряды по степени η [6,10]

$$\alpha=\alpha^{(0)}+\eta \alpha^{(1)}+\eta^2 \alpha^{(2)}+\ldots, \quad v_i=\eta v_i^{(1)}+\eta^2 v_i^{(2)}+\ldots,$$

$$\rho_1=\rho_1^{(0)}+\eta\left(A_1 \sigma^{(1)}+A_2 P_2^{(1)}+A_3 P_3^{(1)}\right)+\eta^2\left(A_1 \sigma^{(2)}+A_2 P_2^{(2)}+A_3 P_3^{(2)}\right)+$$

$$+B_1 \sigma^{(1)2}+B_2 P_2^{(1)2}+B_3 P_3^{(1)2}+C_1 \sigma^{(1)} P_2^{(1)}+C_2 \sigma^{(1)} P_3^{(1)}+C_3 P_2^{(1)} P_3^{(1)}+\ldots+,$$

$$\rho_2=\rho_2^{(0)}+\eta L_1 P_2^{(1)}+\eta^2\left(L_1 P_2^{(1)}+L_2 P_2^{(1)^2}\right)+\ldots, \tag{1.10}$$

$$\rho_3=\rho_3^{(0)}+\eta M_1 P_3^{(1)}+\eta^2\left(M_1 P_3^{(2)}+M_2 P_3^{(1)^2}\right)+\ldots,$$

$$P_c(\theta)=P_c^0+\eta A \theta^{(1)}+\eta^2\left(A \theta^{(2)}+B \theta^{(1)^2}\right)+\ldots$$

где

$$A_1=\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma}\right|_{\sigma^{(0)}}, \quad A_2=\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial P_2}\right|_{P_2^{(0)}}, \quad A_3=\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial P_3}\right|_{P_3^{(0)}},$$

$$B_1=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \sigma^2}\right|_{\sigma^{(0)}}, \quad B_2=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial P_2^2}\right|_{P_2^{(0)}}, \quad B_3=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial P_3^2}\right|_{P_3^{(0)}},$$

$$C_1=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \sigma \partial P_2}\right|_{\sigma^{(0)} P_2^{(0)}}, \quad C_2=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \sigma \partial P_3}\right|_{\sigma^{(0)} P_3^{(0)}}, \quad M_1=\left.\frac{\partial \rho_3}{\partial P_3}\right|_{P_3^{(0)}},$$

$$C_3=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial P_2 \partial P_3}\right|_{P_2^{(0)} P_3^{(0)}}, \quad L_2=\left.\frac{\partial \rho_2}{\partial P_2}\right|_{P_2^{(0)}}, \quad L_2=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial \rho_2}{\partial P_2^2}\right|_{P_3^{(0)}},$$

$$M_2=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_3}{\partial P_3^2}\right|_{P_3^{(0)}}, \quad A=\left.\frac{\partial P_c(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(0)}}, \quad B=\left.\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_c(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta^{(0)}},$$

Из (1.2) и (1.3) для состояния равновесия $v=0$ и $\Gamma_0=const$ следует $P_2^{(0)}=const$, $P_3^{(0)}=const$

$$\beta_0\left[\Gamma_0+(1-\gamma) P_c\left(\theta^{(0)}\right) \theta^{(0)}(1-\gamma) P_3^{0}\right]=a_0 e_1^{0} \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) в (1.9) и (1.4)-(1.6) с учетом (1.11) и приравнивая по отдельности члены при одинаковых степенях $\eta, \eta^2 \ldots$ нулю, получаем линейные однородные уравнения относительно переменных $v_i^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \theta^{(1)}, \alpha^{(1)}, \sigma^{(1)}, e_1^{(1)}$. Для существования нетривиальных решений этой системы необходимо обращение в нуль ее главного детерминанта, т.е.

$$\begin{gathered}\left[(A_1 d_1 + d_2)a_1 - (A_1 q_1 + q_2)b_1\right]c^6 + \left[(A_1 n_1 + m_2 d_1 - m_1 d_2 + n_2)a_1 + \right. \\ \left. + (A_1 l_1 + m_2 q_1 - m_1 q_2 + l_2)b_1 + A_1(d_1 - q_1) + q_2 + d_2\right]c^4 + \\ + \left[A_1(n_1 + l_1) + m_2(d_1 - q_1) - m_1(q_2 + d_2) + a_1(n_1 m_2 - m_1 n_2) + \right. \\ \left. + b_1(m_2 l_1 - m_1 l_2) + n_2 + l_2\right]c^2 + m_2(n_1 + l_1) - m_2(n_2 + l_2) = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

где

$$d_1 = \frac{\rho_2^{(0)}}{A}\left[\left(\gamma_1 - \gamma\theta^{(0)}\right)A + (1-\gamma)P_e\left(\theta^{(0)}\right)\right], \quad l_2 = \left(1 - \theta^{(0)}\right)\rho_3^{(0)},$$

$$d_2 = \rho_2^{(0)} A_2 + \frac{a^{(0)}\rho_2^{(0)}}{1 - a^{(0)}}\left\{L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right\}, \quad m_2 = \frac{1}{1 - a^{(0)}},$$

$$q_1 = \frac{\rho_3^{(0)}}{A}\left[\gamma A + \left(\gamma_1 - \gamma\theta^{(0)}\right)A + (1-\gamma)P_e\left(\theta^{(0)}\right)\right],$$

$$q_2 = \rho_3^{(0)}\left(A_3 + \frac{a^{(0)}\rho_1^{(0)}}{\left(1 - a^{(0)}\right)A\theta^{(0)}}\right), \quad a_1 = M_1 - \frac{\rho_3^{(0)}}{\left(1 - \theta^{(0)}\right)A\theta^{(0)}},$$

$$b_1 = L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\left(1 - \theta^{(0)}\right)A\theta^{(0)}}, \quad n_1 = \frac{a_0\theta^{(0)}\rho_2^{(0)}}{b_0\rho_1^{(0)}}, \quad m_1 = \frac{a_0}{b_0\rho_1^{(0)}\left(1 - a^{(0)}\right)},$$

$$n_2 = \rho_2^{(0)}\theta^{(0)} + \frac{a^{(0)}\rho_1^{(0)}}{1 - a^{(0)}}, \quad l_1 = \frac{a_0\left(1 - \theta^{(0)}\right)p_3^{(0)}}{b_0\rho_1^{(0)}}.$$

Дисперсионное уравнение (1.12) имеет три действительных корня, поэтому возмущение будет переноситься тремя отдельными волнами.

Из системы первого приближения последовательно выразим переменные через $v_3^{(1)}$

$$\begin{gathered}v_1^{(1)} = \beta_{11}v_3^{(1)}, \quad v_2^{(1)} = \beta_{22}v_3^{(1)}, \quad P_2^{(1)} = -c\rho_2^{(0)}\beta_{22}v_3^{(1)}, \\ P_3^{(1)} = -c\rho_3^{(0)}v_3^{(1)}, \quad \theta^{(1)} = \frac{c}{A}\left(\rho_2^{(0)}\beta_{22} - \rho_3^{(0)}\right)v_3^{(1)}, \\ \sigma^{(1)} = \frac{c}{c^2 - m_1}\left[q_1 c - l_1 - \beta_{22}\left(n_1 + c^2 d_1\right)\right]v_3^{(1)}, \quad e_1^{(1)} = -c^{-1}\beta_{11}v_3^{(1)}, \\ a^{(1)} = \frac{a^{(0)}}{c}\left\{\frac{c^2\rho_3^{(0)}}{A\theta^{(0)}} + \beta_{22}\left[1 + c^2\left(L_1 + \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right)\right]\right\}v_3^{(1)},\end{gathered} \tag{1.13}$$

где

$$\beta_{11}=\frac{1}{\rho_1^{(0)}}\left\{\left(\theta^{(0)}\rho_2^{(0)}+\frac{c^2d_1+n_1^2}{\left(1-a^{(0)}\right)\left(c^2-m_1\right)}\right)\beta_{22}-\right.$$

$$\left.-\frac{c^2q_1l_1}{\left(1-a^{(0)}\right)\left(c^2-m_1\right)}+\left(1-\theta^{(0)}\right)\rho_3^{(0)}\right\},\quad \beta_{22}=\frac{1+a_1c^2}{1+b_1c^2}$$

2. Во втором приближении для неизвестных переменных $c^{(2)},\rho_2^{(2)},\ldots,$ и др. получим

$$\frac{1}{\rho_1^{(0)}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(A_1\sigma^{(2)}+A_2\rho_2^{(2)}+A_3\rho_3^{(2)}\right)-\frac{1}{1-a^{(0)}}\frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial\tau}-c^{-1}\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial\tau}=$$
$$=-N_1^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-\beta_{11}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x},$$
$$\frac{1}{a^{(0)}}\frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1}{\theta^{(0)}}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{L_1}{\rho_2^{(0)}}\frac{\partial\alpha_2^{(2)}}{\partial\tau}-c^{-1}\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial\tau}=$$
$$=-N_2^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-\beta_{22}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x},$$
$$\frac{1}{a^{(0)}}\frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial\tau}-\frac{1}{1-\theta^{(0)}}\frac{\partial\theta^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{M_1}{\rho_3^{(0)}}\frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial\tau}-c^{-1}\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial\tau}=$$
$$=-N_3^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x},\tag{2.1}$$
$$\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1}{c\rho_1^{(0)}\left(1-a^{(0)}\right)}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\tau}+\frac{\theta^{(0)}}{c\rho_1^{(0)}}\frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1-\theta^{(0)}}{c\rho_1^{(0)}}\frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial\tau}=$$
$$=N_4^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-c\beta_{11}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x}+F_1\left(v_3^{(1)}\right)\frac{v_3^{(1)}}{\eta},$$
$$\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1}{c\rho^{(0)}}\frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial\tau}=N_5^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-c\beta_{11}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x}+F_2\left(v_3^{(1)}\right)\frac{v_3^{(1)}}{\eta},$$
$$\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial\tau}+\frac{1}{c\rho_3^{(0)}}\frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial\tau}=N_6^{(0)}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial\tau}-c\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x}-F_3\left(v_3^{(1)}\right)\frac{v_3^{(1)}}{\eta},$$
$$\gamma\sigma_3^{(2)}P_3^{(2)}+\theta^{(2)}\left[\left(1-\gamma\right)P_C\left(\theta^{(0)}\right)+\left(\gamma_1-\gamma\theta^{(0)}\right)A\right]-\frac{a_0}{b_0}e^{(2)}=$$
$$=\frac{T}{b_0}-\frac{c^2}{A^2}\left[\left(\gamma_1-\gamma\theta^{(0)}\right)B-\gamma A\right]\left(P_2^{(2)}\beta_{22}-P_3^{(2)}\right)^2,$$

$$P_3^{(2)} - P_2^{(2)} - A\theta_2 = B\left[\frac{c}{A}\left(\beta_{11}P_2^{(0)} - P_3^{(0)}\right)\right]{v_3^{(1)}}^2,$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial \tau} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} = \beta_{11}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x} - \beta_{11}c^{-2}v_3^{(1)}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \tau},$$

где

$$N_1^{(0)} = \frac{2c^2}{\rho_1^{(0)}}\left\{\frac{q_1c^2 - l_1 - \beta_{22}\left(n_1 + c^2 d_1\right)}{c^2 - m_1}\left[\frac{B_1\left(q_1c^2 - l_1 - \beta_{22}\left(n_1 + c^2 d_1\right)\right)}{c^2 - m_1} - \right.\right.$$

$$\left. - C_1\rho_2^{(0)}\beta_{22} - C_2\rho_3^{(0)}\right] + B_2{\rho_2^{(0)}}^2\beta_{22}^2 + B_3{\rho_3^{(0)}}^2 + C_3\rho_2^{(0)}\rho_3^{(0)}\beta_{22} -$$

$$- \frac{a^{(0)}\rho_1^{(0)}}{c^2\left(1 - a^{(0)}\right)}\left[\frac{c^2\rho_3^{(0)}}{A\theta^{(0)}} + \beta_{22}\left(1 + c^2\left(L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right)\right)\right] \times$$

$$\left. \times\left[\frac{A_1\left(q_1c^2 - l_1 - \beta_{22}\left(n_1 + c^2 d_1\right)\right)}{c^2 - m_1} - A_2\rho_2^{(0)}\beta_{22} + A_3\rho_3^{(0)}\right] - c^{-4}\beta_{11}^2\rho_1^{(0)}\right\},$$

$$N_2^{(0)} = 2\left\{L_2c^2\rho_2^{(0)}\beta_{22}^2 + \frac{1}{A\theta^{(0)}}\left(\rho_2^{(0)}\beta_{22} + \rho_3^{(0)}\right)\left[\beta_{22}\left(1 + c^2\left(L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c^2\rho_3^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right] - L_1\beta_{22}^2\left(1 + c^2L_1\right) - c^{-2}\beta_{22}^2\right\} \qquad (2.2)$$

$$N_3^{(0)} = 2\left\{c^2\rho_3^{(0)}M_2 - \frac{\rho_2^{(0)}\beta_{22} - \rho_3^{(0)}}{A\left(1 - \theta^{(0)}\right)}\left[\beta_{22}\left(1 + c^2\left(L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c^2\rho_3^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right] - M_1\left(1 + c^2M_1\right) - c^{-2}\right\},$$

$$N_4^{(0)} = \frac{c}{\left(1 - a^{(0)}\right)\rho_1^{(0)}}\left\{\frac{2 - a}{A}\left(\rho_2^{(0)}\beta_{22} - \rho_3^{(0)}\right)^2 - c^{-2}a^{(0)} \times \right.$$

$$\left. \times\left[\frac{c^2\rho_3^{(0)}}{A\theta^{(0)}} + \beta_{22}\left(1 + c^2\left(L_1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{A\theta^{(0)}}\right)\right)\right]\cdot\left[\theta^{(0)}\rho_2^{(0)}\beta_{22} - \rho_3^{(0)}\left(1 - \theta^{(0)}\right)\right]\right\},$$

$$F_1\left(v_3^{(1)}\right) = \frac{\left(\beta_{11} - \beta_{22}\right)f_{12}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{11} - \beta_{22}\right|\right) + \left(\beta_{11} - 1\right)f_{13}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{11} - 1\right|\right)}{\rho_1^{(0)}\left(1 - a^{(0)}\right)},$$

$$N_5^{(0)} = \beta_{22}^2 c^{-1}\left(1+c^2 L_1\right), N_6^{(0)} = c^{-1}\left(1+c^2 M_1\right), \quad F_2\left(v_3^{(1)}\right) =$$

$$= \frac{\left(\beta_{22}-1\right) f_{23}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{22}-1\right|\right) - \left(\beta_{11}-\beta_{22}\right) f_{12}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{11}-\beta_{22}\right|\right)}{\rho_2^{(0)} a_2^{(0)} \theta^{(0)}} \frac{v_3^{(1)}}{\eta},$$

$$F_3\left(v_3^{(1)}\right) = \frac{\left(\beta_{11}-1\right) f_{13}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{11}-1\right|\right) + \left(\beta_{22}-1\right) f_{23}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{22}-1\right|\right)}{\rho_3^{(0)} a^{(0)}\left(1-\theta^{(0)}\right)} \frac{v_3^{(1)}}{\eta},$$

$$T = \frac{1}{\eta_0}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{q=1}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta v_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} - c^{-1} v_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^q e_1^{(1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_0}{b_0} \sum_{i=1}^{m} b_i \prod_{q=1}^{1}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta v_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} - c^{-1} v_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^q e_1^{(1)}\right].$$

Если учитывать, что $\eta << 1,\ c^{-1} v_1 << 1,\ \left|\eta v_1^{(1)} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x}\right| << 1,$

$$\sigma^{(1)} + \gamma\left[P_3^{(1)} + \theta^{(0)}\left(P_2^{(1)} - P_3^{(1)}\right)\right] + \gamma_1 A \theta^{(1)} + (1-\gamma) P_c\left(\theta^{(0)}\right)\theta^{(1)} = \left(a_0/b_0\right) e_1^{(1)},$$

то выражение для T упрощается

$$T = \frac{\beta_{11}}{\eta c} \sum_{i=1}^{n} S_{i+1} \frac{\partial^i v_3^{(1)}}{\partial \tau^1}, \quad S_{i+1} = \Gamma_{(m-1)} b_1 \frac{a_0}{b_0} - a_i \Gamma_{(n-1)} \tag{2.3}$$

$$\Gamma_{(n-1)} = 1, \quad n-i > 0; \quad \Gamma_{(n-1)} = 0, \quad n-i < 0.$$

Детерминант системы уравнений (2.1) равен (1.12), поэтому для совместимости системы (2.1) необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial x} + R_1 v_3^{(1)} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{R_2}{\eta} v_3^{(1)} + \frac{R_3}{\eta} \sum_{i=1}^{n} S_{i+1} \frac{\partial^{i+1} v_3^{(1)}}{\partial \tau^{i+1}} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\frac{\Delta}{2} = Q - \frac{\beta_{22}}{1-a^{(0)}}\left[\left(1-a^{(0)}\right) Q - a^{(0)} \rho_1^{(0)}\left(1+c^2 b_1\right)\left(c^2 - m_1\right)\right] +$$

$$+ c^2 \beta_{11}\left(1+c^2 b_1\right)\left(\rho_1^{(0)} + \frac{a_0}{b_0} A_1\right),$$

$$R_1 \Delta = Q\left(N_3^{(0)} - c^{-1} N_6^{(0)}\right)\left(Q - \frac{a^{(0)} \rho_1^{(0)}\left(1+c^2 b_1\right)\left(c^2 - m_1\right)}{1-a^{(0)}}\right)\left(N_2^{(0)} - c^{-1} N_5^{(0)}\right) +$$

$$\rho_1^{(0)}\left(1+c^2 b_1\right)\left(c^2 - m_1\right)\left[N_1^{(0)} - \frac{c}{c^2 - m_1}\left(1 + \frac{a_0 A_1}{b_0 \rho_1^{(0)}}\right) N_4^{(0)}\right] - \frac{a_0 \beta_{11}^2}{b_0 c^2} \times$$

$$\times \left(1+c^2 b_1\right)\left(A_1 c^2 - m_2\right) + \frac{2B}{A\theta^{(0)}}\left[\frac{Q}{1-\theta^{(0)}} - \frac{a^{(0)} \rho_1^{(0)}\left(1+c^2 b_1\right)\left(c^2 - m_1\right)}{1-a^{(0)}} + \right.$$

$$+\theta^{(0)}\left(1+c^2b_1\right)\left(A_1c^2-m_2\right)\left(\frac{\gamma}{B}A^2+(1-\gamma)P_c\left(\theta^{(0)}\right)\right)\left[\frac{c}{A}\left(\beta_{22}\rho_2^{(0)}-\rho_3^{(0)}\right)\right]^2, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
R_2\Delta = c^{-1}\Bigg\{ &(\beta_{11}-1)\left(\frac{Q}{\rho_3^{(0)}a^{(0)}\left(1-\theta^{(0)}\right)}-\frac{c^2\left(1+b_1c^2\right)\left(\rho_1^{(0)}+a_0b_0^{-1}A_1\right)}{\rho_1^{(0)}\left(1-a^{(0)}\right)}\right)\times \\
&\times f_{13}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{11}-1\right|\right)+(\beta_{22}-1)\left(\frac{Q}{\rho_3^{(0)}a^{(0)}\left(1-\theta^{(0)}\right)}+\right. \\
&\left.+\frac{\left(1-a^{(0)}\right)Q-a^{(0)}\rho_1^{(0)}\left(1+c^2b_1\right)\left(c^2-m_1\right)}{\rho_2^{(0)}a^{(0)}\theta^{(0)}\left(1-a^{(0)}\right)}\right)f_{23}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{22}-1\right|\right)+ \\
&+\frac{\beta_{22}-\beta_{11}}{\left(1-a^{(0)}\right)}\left[\frac{\left(1-a^{(0)}\right)Q-\left(1+c^2b_1\right)\left(c^2-m_1\right)a^{(0)}\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}a^{(0)}\theta^{(0)}}+\right. \\
&\left.+\frac{c^2}{\rho_1^{(0)}}\left(1+c^2b_1\right)\left(\rho_1^{(0)}+a_0b_0^{-1}A_1\right)\right]f_{12}\left(\left|v_3^{(1)}\right|\left|\beta_{22}-\beta_{11}\right|\right)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$R_3\Delta=\frac{\beta_{11}}{b_0c^2}\left(1+c^2b_1\right)\left(A_1c^2+m_2\right),\quad Q=\left(A_1c^2+m_2\right)\left(n_1+c^2d_1\right)+$$

$$+\left(n_2+c^2d_2\right)\left(c^2-m_1\right).$$

После замены переменных в (2.4) $v=-\eta cR_1v_3^{(1)}=-cR_1v_3$, $T=x-ct$, $x=x/\eta$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial T}+R_2v+R_3\sum_{i=1}^{n}(-c)^{i+1}s_{i+1}\frac{\partial^{i+1}v}{\partial T^{i+1}}=0 \tag{2.7}$$

Замена $v=V\exp(-R_2x)$ уравнение (2.7) приводит к виду

$$\frac{\partial V}{\partial x}+e^{-R_2x}V\frac{\partial V}{\partial T}+R_3\sum_{i=1}^{n}(-c)^{i+1}S_{i+1}\frac{\partial^{i+1}V}{\partial T^{i+1}}=0 \tag{2.8}$$

При $R_2x\to 0$ уравнение (2.8) асимптотически приближается к уравнению, которое не учитывает взаимодействия фаз.

Литература

[1]. Асан-Джалалов А.Г., Кузнецов В.В., Киссин И.Г. и др. *Способ разработки обводненного нефтяного месторождения.* с. №1596081 СССР В.И., 1990, №36, с.153

[2]. Эфрос А.Л. *Физика и геометрия беспорядка.* М.: Наука, 1982, 175 с.

[3]. Николаевский В.Н. *Механизм вибровоздействия на нефтеотдачу месторождения и доминантные частоты.* Докл. АН СССР, 1989, т.307, №3, с.570-575.

[4]. Гурвич И.И. *К теории сферического излучателя сейсмических волн.* Изв. АН СССР, Физика Земли, 1965, №10, с.45-56.

[5]. Николаевский В.Н. *Механика пористых и трещиноватых сред.* М.: Недра, 1984, 232 с.

[6]. Николаевский В.Н. *Нелинейные волны в грунтах и трещиноватых горных породах.* Физ. техн. пробр. разработки полезных ископаемых, 1988, №6, с.31-38.

[7]. Береснев И.А., Митлин В.С., Николаевский В.Н. *Роль коэффициента* нелинейности при *возбуждении доминантных сейсмических частот.* Докл. АН СССР, 1991, т.317, №5, с.1103-1107.

[8]. Рамазанов Т.К. *Нелинейные волны в двух фазных системах.* Прикладная механика, 1995, №9, т.31, стр.38-45.

[9]. Рамазанов Т.К. *Нелинейные волны в суспензиях с антисимметричными напряжениями.* Труды института мат. и мех. АН Азерб, Баку, 1996, стр.120-124.

[10]. Рамазанов Т.К., Курбанов А.И., Тагиев М.М. *Нелинейные волновые процессии в двух взаимопроникающих сжимаемых средах.* Сборник трудов I Респ. конф. по механике и математике АН Азерб. Часть I, Механика, Баку, 1995, стр.148-152.