1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 536.24

РАСУЛОВ М.Б.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В МНОГОСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим многослойную сферическую оболочку, состоящую из произвольного числа упругих слоев разной толщины с различными физическими свойствами, находящуюся в однородной среде. По внутренней поверхности оболочки находящееся в состоянии покоя в момент времени $t \geq 0$ происходит термический удар $U = U_0 f(t)$. Задача сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_i^2}\frac{\partial U_i}{\partial t}, \tag{1.1}$$

где U_i - избыточная температура, α_i - коэффициент температуропроводности слоев, $i = 1,2,\ldots,n$.

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &U_1 = U_0 f(t) && \text{при} && r = a_0, \\ &\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial r} = \lambda_{i+1}\frac{\partial U_i}{\partial r};\ U_i = U_{i+1} && \text{при} && r = a_i, \\ &U_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0 && \text{при} && t = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

здесь λ_i - коэффициент теплопроводности слоев.

Применив к уравнениям (1.1), (1.2) преобразования Лапласа получим:

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU_i}{dr} - \frac{P}{\alpha_i^2}U_i = 0 \tag{1.3}$$

решение этого уравнения представим в следующем виде

$$U_i = A_i \frac{1}{r} K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i} r\right) + B_i \frac{1}{r} I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i} r\right),$$

где $K_{\frac{1}{2}}$ и $I_{\frac{1}{2}}$ - цилиндрические функции.

Используя представления цилиндрических функций полуцелого порядка через элементарные функции и преобразования граничных условий (1.2) получим систему уравнений относительно коэффициентов A_i и B_i:

$$\begin{gathered} A_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_1}a_0} + B_1 e^{+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_1}a_0} = \alpha_0 U_0 f(p); \\ A_i e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}a_i} + B_i e^{+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}a_i} = A_{i+1} e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}a_i} + B_{i+1} e^{+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}a_i}; \\ \lambda_i\left(-A_i e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}a_i}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}\right) + B_i e^{+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}a_i}\left(-\frac{1}{a_i} + \frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}\right)\right) = \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$= \lambda_{i+1}\left(-A_{i+1}e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}a_i}\left(\frac{1}{a_i}+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}\right)+B_{i+1}e^{\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}a_i}\left(-\frac{1}{a_i}+\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}\right)\right).$$

Здесь для однородной среды $B_{n+1}=0$.

Системы уравнений (1.4) решаем методом использованным в работе [1]. Соответственно:

$$B_i = -A_i\theta_i e^{\frac{2a_i}{\alpha_i}\sqrt{p}}, \tag{1.5}$$

где

$$\theta_i = \frac{\theta_{0i}+\chi'_{i+1}\theta_{i+1}e^{\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}2n_{i+1}}}{1+\chi''_{i+1}\theta_{i+1}e^{\frac{\sqrt{p}}{\alpha_{i+1}}2n_{i+1}}}; \tag{1.6}$$

$$\theta_{0i} = \frac{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}-\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)+\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}+\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)-\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}; \tag{1.7}$$

$$\chi'_{i+1} = \frac{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}-\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)+\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}+\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)-\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}; \tag{1.8}$$

$$\chi''_{i+1} = \frac{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}-\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)+\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{p}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}+\frac{\lambda_{i+1}}{\alpha_{i+1}}\right)-\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{a_i}}. \tag{1.9}$$

Зная A_1 и B_1 из первого уравнения (1.4), можно определить температуры каждого слоя:

$$U_1 = \frac{a_0}{r_1}f(p)\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_1}r_1}+\theta_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_1}(2h_1-r_1)}}{1+\theta_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_1}2h_1}}; \tag{1.10}$$

....

$$U_i = \frac{a_{i-1}}{r_1+a_{i-1}}U_{i-1}(h_{i-1},p)\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}r_i}+\theta_i e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}(2h_i-r_i)}}{1+\theta_i e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}2h_i}}, \tag{1.11}$$

где $h_i = a_i - a_{i-1}$; $r_i = r - a_{i-1}$; $0 \le r_i \le h_i$.

Разлагая в (1.10) и (1.11) $\left(1+\theta_i e^{-\frac{\sqrt{p}}{\alpha_i}2h_i}\right)^{-1}$ в геометрическую прогрессию получим:

$$U_1(p,r_1)=\frac{a_0}{r_1+a_0}f(p)\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_1}r_1}+\sum_{K_1=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_1}(2h_1K_1+r_1)}-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_1}(2h_1K_1-r_1)}\right)(-1)^{K_1}(\theta_1)^{K_1}\right);\quad(1.12)$$

$$U_i(p,r_{i1})=\frac{a_{i-1}}{r_i+a_{i-1}}U(p,h_{i-1})\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_i}r_i}+\sum_{K_i=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_i}(2h_iK_i+r_i)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a_i}(2h_iK_i-r_i)}\right)(-1)^{K_i}(\theta_i)^{K_i}\right).\qquad(1.13)$$

Используя результаты [1] и обобщенные теоремы Эфроса, определить оригиналы (1.12) и (1.13) не представляет принципиальной трудности (при $f(t)=H(t)$).

Литература

[1]. Расулов М.Б. *Распространение роста волн в упругих и вязкоупругих многослойных средах.* Диссертация ИММ , 1985.