1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.5 + 539.30

ТАЛЫБЛЫ Л.Х.

ОБ ОДНОМ ПРОСТЕЙШЕМ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t определена при $t > 0$ и несобственный интеграл

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \qquad (1)$$

который ставит в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексного переменного p, сходится в какой-либо полуплоскости $\operatorname{Re} p > a = const > 0$. При этом, как известно, $F(p)$ называется односторонним преобразованием Лапласа функции $f(t)$ или изображением функции $f(t)$ по Лапласу, функция же $f(t)$ - функцией- оригиналом.

В теориях интегральных преобразований важной задачей является задача обращения преобразования - восстановление функции-оригинала по ее преобразованию. Имеются многие методы и формулы точного и приближенного обращения преобразования Лапласа [1-3]. Учитывая то, что каждый из этих методов и формул имеют наряду с некоторыми преимуществами и определенные недостатки, приведем здесь один удобный для практического применения метод нахождения оригинала по изображению. Предложенный метод, как убедимся, эффективен при определении оригинала как в случае аналитического задания изображения, так и в случае численном - для дискретных значений параметра преобразования $p = p_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.

Покажем, что функция - оригинал $f(t)$ может быть представлен через известное изображение $F(p)$ в таком виде

$$L^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots) F(p_n)\right]_{p_n = c_n(t)}, \qquad (2)$$

где φ_n $(n = 0,1,2,..)$ некоторые функции от комплексных параметров p_n $(n = 0,1,2,..)$. Величины p_n $(n = 0,1,2,..)$ в свою очередь выражаются через некоторые , вообще говоря, комплексные функции $c_n(t)$ действительного аргумента t, которые, в частном случае могут быть также константами.

Производим следующую замену переменных в формуле (1):

$$t = e^v, dt = e^v dv, \quad f(t) = f(e^v) \equiv \psi(v)$$

Составим сумму, которая входит в формулу (2), учтем при этом формулу (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\left(p_0,p_1,\dots,p_n,\dots\right)F(p_n)=\int_0^{\infty}\varphi_0 e^{-p_0 t}f(t)dt+\int_0^{\infty}\varphi_1 e^{-p_1 t}f(t)dt+\dots+\int_0^{\infty}\varphi_n e^{-p_n t}+\dots=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_0 e^{v-p_0 e^{v}}+\varphi_1 e^{v-p_1 e^{v}}+\dots+\varphi_n e^{v-p_n e^{v}}+\dots\right)\psi(v)dv \qquad (3)$$

Наличие произвольных величин в подинтегральном выражении в скобке позволяет наложить определенные условия на него. Исходя из этого, потребуем выполнение условия

$$\varphi_0 e^{v-p_0 e^{v}}+\varphi_1 e^{v-p_1 e^{v}}+\varphi_n e^{v-p_n e^{v}}+\dots=\delta(u-v), \qquad (4)$$

где $\delta(u-v)$ дельта функция Дирака [4], $u=u(p_0,p_1,\dots,p_n,\dots)$. Будем пользоваться следующими свойствами δ – функции

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=1;\quad \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t) \qquad (5)$$

Соотношение (3) с использованием (4) и (5) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(p_0,p_1,\dots,p_n,\dots)F(p_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-v)\psi(v)dv=\psi(u) \qquad (6)$$

Теперь задача состоит в определении $\varphi_0,\varphi_1,\dots,p_0,p_1,\dots$ через u. Воспользуемся разложением функции $\psi(v)$ в бесконечный степенной ряд Тейлора по степеням разности $(v-u)$:

$$\psi(v)=\psi(u)+\psi'(u)(v-u)+\frac{\psi''(u)}{2!}(v-u)^2+\dots+\frac{\psi^{(n)}(u)}{n!}(v-u)^n+\dots \qquad (7)$$

Учтем (7) в (3) и полученное соотношение сравним с (6). В результате будем иметь систему условий

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,v)dv=1$$

$$I_{v-u}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,v)(v-u)dv=0$$

$$I_{(v-u)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,v)(v-u)^2dv=0 \qquad (8)$$

. . . .

$$I_{(v-u)^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(p,v)(v-u)^n dv=0$$

. . . . ,

где

$$\Phi(p,v)=\varphi_0 e^{v-p_0 e^{v}}+\varphi_1 e^{v-p_1 e^{v}}+\dots+\varphi_n e^{v-p_n e^{v}}+\dots \qquad (9)$$

Система условий (8) после вычисления интегралов с учетом (9) переходит к системе соотношений.

$$\frac{\varphi_0}{p_0}+\frac{\varphi_1}{p_1}+\ldots+\frac{\varphi_n}{p_n}+\ldots=1$$

$$\frac{\varphi_0}{p_0}\ln p_0+\frac{\varphi_1}{p_1}\ln p_1+\ldots+\frac{\varphi_n}{p_n}\ln p_n+\ldots=d_1$$

$$\frac{\varphi_0}{p_0}\ln^2 p_0+\frac{\varphi_1}{p_1}\ln^2 p_1+\ldots+\frac{\varphi_n}{p_n}\ln^2 p_n+\ldots=d_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$\frac{\varphi_0}{p_0}\ln^{n-1} p_0+\frac{\varphi_1}{p_1}\ln^{n-1} p_1+\ldots+\frac{\varphi_n}{p_n}\ln^{n-1} p_n+\ldots=d_{n-1}$$

$$\frac{\varphi_0}{p_0}\ln^{n} p_0+\frac{\varphi_1}{p_1}\ln^{n} p_1+\ldots+\frac{\varphi_n}{p_n}\ln^{n} p_n+\ldots=d_{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Свободные члены этой системы $d_n\ (n=1,2,\ldots)$ определяются через величины u следующим образом:

$$d_n=(-1)^n(u^n+\gamma_n)+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}\gamma_{n-1}d_1+(-1)^{n-2}\binom{n}{2}\gamma_{n-2}d_2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\gamma_{n-m}d_m+\ldots \quad (m=1,2,\ldots,n-1)\ (n=1,2,\ldots)\quad (d_0=0) \qquad (11)$$

Здесь $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - биномиальные коэффициенты ;

$$\gamma_n=-\int_0^\infty e^{-\tau}\ln^n\tau d\tau \qquad n=1,2,\ldots \qquad (12)$$

Система соотношений (10) дает возможность определять величины $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,p_0,p_1,\ldots$ через функцию u. При этом достаточно определить только одну нетривиальную систему корней. После определения $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,p_0,p_1,\ldots$ через u формула (6) с учетом замены u через $\ln t$ определяет функцию - оригинал $f(t)$ и вместе с тем, доказывает верность предложенного нами представления (2):

$$\psi(u)=\psi(\ln t)=f(t)=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_n F(p_n)\right]_{\substack{\varphi_n=\varphi_n(u)=\varphi_n(\ln t)=C_n^{(1)}(t)\\ p_n=p_n(u)=p_n(\ln t)=C_n^{(2)}(t)}} \qquad (13)$$

Как видим, нахождение оригинала сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений (10), которая по $\varphi_0,\varphi_1,\ldots$ является линейной, по $p_0,p_1,\ldots$ нелинейной. Полученная бесконечная система непосредственно связана с разложением $\psi(v)$ в ряд Тейлора (7). Если за приближенное значение функции $\psi(v)$ примем отрезок ряда Тейлора в точке u, то для определения неизвестных величин получим конечную систему уравнений. Решение этой системы позволяет представить функцию- оригинал приближенно в виде конечной суммы через функцию - изображение. Выпишем конкретные аналитические формулы приближенного обращения. Для этого, предварительно приведем конкретные значения величин γ_n и $d_n\ (n=1,2,\ldots)$. Наши вычисления на основе формул (12) и (11) соответственно для γ_n и d_n дали следующие результаты $(n=\overline{1,6})$:

$\gamma_1 = 0{,}577;\quad \gamma_2 = -1{,}976;\quad \gamma_3 = 5{,}442;\quad \gamma_4 = -23{,}529;\quad \gamma_5 = 117{,}7;$
$\gamma_6 = -715; \gamma_7 = 5019{,}42;$

$$d_1 = -u - \gamma_1 = -u - 0{,}577$$

$$d_2 = u^2 + 2\gamma_1 u + 2\gamma_1^2 + \gamma_2 = u^2 + 1{,}154u - 1{,}31$$

$$d_3 = -u^3 - 3\gamma_1 u^2 - (6\gamma_1^2 + 3\gamma_2)u - (6\gamma_1\gamma_2 + 6\gamma_1^3 + \gamma_3) = -u^3 - 1{,}731u^2 + \\ + 3{,}93u + 0{,}2464$$

$$d_4 = u^4 + 4\gamma_1 u^3 + (6\gamma_2 + 12\gamma_1^2)u^2 + (4\gamma_3 + 24\gamma_1\gamma_2 + 24\gamma_1^3)u + \\ + \gamma_4 + 8\gamma_1\gamma_3 + 36\gamma_1^2\gamma_2 + 24\gamma_1^4 + 6\gamma_2^2 = u^4 + 2{,}308u^3 - 7{,}861u^2 - \\ - 0{,}9856u + 3{,}996$$

$$d_5 = -u^5 - 5\gamma_1 u^4 - (10\gamma_2 + 20\gamma_1^2)u^3 - (10\gamma_3 + 60\gamma_1\gamma_2 + 60\gamma_1^3)u^2 - \\ - (40\gamma_1\gamma_3 + 180\gamma_1^2\gamma_2 + 5\gamma_4 + 30\gamma_2^2 + 120\gamma_1^4)u - (\gamma_5 + 10\gamma_1\gamma_4 + 60\gamma_1^2\gamma_3 + 20\gamma_2\gamma_3 + \\ + 240\gamma_1^3\gamma_2 + 90\gamma_1\gamma_2^2 + 120\gamma_1^5) = -u^5 - 2{,}885u^4 + 13{,}1u^3 + 2{,}463u^2 - 19{,}977u + 5{,}073$$

$$d_6 = u^6 + 3{,}463u^5 - 19{,}649u^4 - 4{,}937u^3 + 59{,}937u^2 - 30{,}431u - 7{,}984$$

$$d_7 = -u^7 - 4{,}0404u^6 + 27{,}496u^5 + 8{,}635u^4 - 139{,}74u^3 + 106{,}714u^2 + \\ + 55{,}889u - 35{,}655.$$

Теперь примем, что функция $\psi(v)$ приближенно равна сумме первых двух членов в разложении (7), т. е. в ряде (7) сохраняется только первая производная функции $\psi(v)$ в точке u (случай n=1). В этом случае система уравнений (8) превращается в два следующих соотношения:

$$\frac{\varphi_0}{p_0} = 1;\quad \frac{\varphi_0}{p_0}\ln p_0 = d_1 = -u - \gamma_1$$

Отсюда получим

$$\varphi_0 = p_0 = e^{-u}e^{-\gamma_1} = e^{-\ln t}e^{-0{,}5772} = 0{,}5615t^{-1}.$$

При этом формула обращения (13) представится в таком виде.

$$L_T^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[p_0 F(p_0)\right]_{p_0 = 0{,}5615t^{-1}} \tag{14}$$

Как видим, в этом случае полученная формула совпадает с известной формулой Шепери [2,3]. Формула (14)- более приближенная формула, вместе с тем, она - более простая. Данная формула может быть использована при изучении различных процессов в периодах близких к начальному. Назовем формулу (14) формулой обращения первого порядка.

Предположим, что приближенное значение функции $\psi(v)$ определяется суммой первых четырех членов в разложении Тейлора, т.е. сохраняются производные функции ψ до трех порядков. В этом случае число неизвестных четыре: $\varphi_0, \varphi_1, p_0, p_1$. Для их определения из (10) имеем систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= 1 \\ x_0 z_0 + x_1 z_1 &= d_1 \\ x_0 z_0^2 + x_1 z_1^2 &= d_2 \\ x_0 z_0^3 + x_1 z_1^2 &= d_3 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь принято обозначение $x_0 = \varphi_0 / p_0$, $x_1 = \varphi_1 / p_1$; $z_0 = \ln p_0$, $z_1 = \ln p_1$. Выражения для d_1, d_2, d_3 через u представлены выше. Решение системы (15) не представляет трудности. Получены следующие значения:

$$z_0 = \ln p_0 = -u + 0{,}155 + i1{,}052$$

$$z_1 = \ln p_1 = -u + 0{,}155 - i1{,}052$$

$$x_0 = \frac{\varphi_0}{p_0} = 0{,}5 + i0{,}348$$

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{p_1} = 0{,}5 - i0{,}348$$

Дальнейшие вычисления и замена u через $\ln t$ дали следующие результаты:

$$p_0 = (0{,}5791 + i1{,}0144)t^{-1} \quad (16)$$

$$p_1 = (0{,}5791 - i1{,}0144)t^{-1} \quad (17)$$

$$\varphi_0 = (-0{,}0635 + i0{,}7087)t^{-1} \quad (18)$$

$$\varphi_1 = (-0{,}0635 - i0{,}7087)t^{-1} \quad (19)$$

В этом случае формула обращение представляется в виде

$$L_{III}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\varphi_0 F(p_0) + \varphi_1 F(p_1)\right]_{\substack{p_0 = p_0(t);\, \varphi_0 = \varphi_0(t) \\ p_1 = p_1(t);\, \varphi_1 = \varphi_1(t)}} \quad (20)$$

В формуле (20) функции $p_0 = p_0(t), p_1 = p_1(t), \varphi_0 = \varphi_0(t), \varphi_1 = \varphi_1(t)$, представлены соотношениями (16) -(19) соответственно. Заметим, что величины p_0 и p_1, а также φ_0 и φ_1 являются сопряженными комплексными функциями действительного аргумента t.

$$p_1 = \overline{p}_0 \equiv \overline{p}; \quad \varphi_1 = \overline{\varphi}_0 \equiv \overline{\varphi};$$

С учетом сказанного, формула (20) переписывается в виде

$$L_{III}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\varphi F(p) + \overline{\varphi} F(\overline{p})\right]_{\substack{p = (0{,}5791 + i1{,}0144)t^{-1} \\ \varphi = (-0{,}0635 + i0{,}7087)t^{-1}}} \quad (21)$$

Формулу (21 или (20) назовем формулой обращения преобразования Лапласа третьего порядка.

Теперь продолжим дальше и за приближенное значение функции $\psi(v)$ примем отрезок ее ряда Тейлора, который состоит из первых шести членов и в которую входит производные ψ вплоть до пятого порядка включительно. В этом случае для определения шести неизвестных $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ p_0, p_1, p_2 из (10) получаем систему шести уравнений

$$\begin{gathered} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 = d_1 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ x_0 z_0^5 + x_1 z_1^5 + x_2 z_1^5 = d_5 \end{gathered} \quad (22)$$

Не вдаваясь в подробности напишем решение системы (22) (напомним, что нам достаточно иметь одно нетривиальное решение):

$$z_0 = \ln p_0 = -u + 0{,}2628$$

$$z_1 = \ln p_1 = -u + 0{,}712 + i1{,}47$$

$$z_2 = \ln p_2 = -u + 0{,}712 - i1{,}47$$

$$x_0 = \frac{\varphi_0}{p_0} = 0{,}9225$$

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{p_1} = 0{,}03875 + i0{,}2975$$

$$x_2 = \frac{\varphi_2}{p_2} = 0{,}03875 - i0{,}2975$$

С учетом полученного решения определяем:

$$p_0 = 1{,}3t^{-1}, \quad \varphi_0 = 1{,}2t^{-1} \tag{23}$$

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\} = (0{,}205 \pm i2{,}0276)t^{-1} \tag{24}$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix}\right\} = (-0{,}5953 \pm i0{,}1396)t^{-1} \tag{25}$$

Выпишем формулу- обращение, соответствующую данному случаю:

$$L_V^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\varphi_0 F(p_0) + \varphi_1 F(p_1) + \varphi_2 F(p_2)\right]_{\substack{\varphi_i = \varphi_i(t) \\ p_i = p_i(t) \\ (i=0,1,2)}} \tag{26}$$

Входящие сюда функцию $\varphi_i, p_i \quad (i = 0,1,2)$ представлены соотношениями (23)-(25), из которых следует, что величины p_1 и p_2, а также φ_1 и φ_2 сопряженные комплексные функции действительного переменного t. Исходя из этого, формулу (26) перепишем в виде

$$L_V^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \left[\varphi_0 F(p_0) + \varphi_1 F(p_1) + \overline{\varphi}_1 F(\overline{p}_1)\right]_{\substack{\varphi_i = \varphi_i(t) \\ p_i = p_i(t) \\ (i=0,1)}} \tag{27}$$

Здесь $p_0 = 1{,}3t^{-1}, \quad \varphi_0 = 1{,}2t^{-1}, \quad p_1 = (0{,}205 + i2{,}0276)t^{-1}; \varphi_1 = (-0{,}5953 + i0{,}1396)t^{-1}$

Формулу (27) (или 26) назовем формулой обращения преобразования Лапласа пятого порядка.

Следует отметить, что полученные значения для параметров p не нарушают условие сходимости несобственного интеграла (1).

Таким образом, мы получили очень удобные формулы (14), (21) (или (20)), (27) (или (26)) обращения преобразования Лапласа. Эти формулы, особенно формулы (21) и (26), хотя приближенно, но с достаточной степенью точности с помощью лишь элементарных операций определяют функцию- оригинал по заданной функции - изображению по Лапласу. Каждая представленная выше формула обращение может быть самостоятельно использована, поскольку при получении последующей формулы не используется предыдущая. Оценка погрешности данных формул непосредственно связана с приближенной формулой Тейлора. Ясно, что формула (27) более точная по сравнению с формулой (21) и (14), формула же (21) более точная по отношению к формуле (14). Предложенный метод позволяет рассчитывать формулы - обращение более высокого порядка.

Приведем один тестовый пример. Предположим, что $F(p) = 1/(1+p)$. При этом $f(t) = e^{-t}$. Определим $f(t)$ в соответстствии с приближенными формулами (14) и (21). Имеем соответственно

$$f_S = \frac{1}{1+2t}; \; f_T = \frac{-0{,}13t + 1{,}36}{t^2 + 1{,}16t + 1{,}36}$$

третьего, пятого порядков (14), (20) (или (21)), (26) (или(27)) следует также из (30), (31), (32).

Можно показать, что величины $a_k\ (k = 0,1,\ldots,n-1)$ являются корнями некоторого многочлена (полинома) n-й степени. При этом коэффициенты этого многочлена есть решение определенной системы линейных алгебраических уравнений. Свободные члены и коэффициенты при неизвестных этой системы состоят из свободных членов $M_k(\gamma)\ (k = \overline{1,n-1})$ системы (30). При этом если взять число n нечетным , то одна из величин a_k будет действительным числом, остальные - комплексными попарно- сопряженными числами, если же n взять четным, то величины $a_k\ (k = \overline{0,n-1})$ будут комплексными попарно-сопряженными числами. Для наглядности покажем отмеченное на примере n=4 (обобщение на произвольное число n производится аналогичным образом). Вместе с тем, определим формулу- обращение седьмого порядка, т.е. формулу - обращение, которая соответствует случаю приближенного представления функции - оригинала через отрезок ряда Тейлора, содержащий в себе производные этой функции до седьмого порядка включительно. При этом подлежащее определению число неизвестных будет восемь : $x_k, a_k \quad (k = 0,1,2,3)$. Исходя из этого, выделим из (30) восемь первых уравнений с четырьмя членами в левой части:

$$\begin{aligned} &x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_0 a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b_1 \\ &x_0 a_0^2 + x_1 a_1^2 + x_2 a_2^2 + x_3 a_3^2 = b_2 \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - \\ &x_0 a_0^7 + x_1 a_1^7 + x_2 a_2^7 + x_3 a_3^7 = b_7 \end{aligned} \tag{33}$$

где $b_i = (-1)^i M_i(\gamma)\ (i = \overline{1,7})$

$b_1 = -0{,}577;\ b_2 = -1{,}31;\quad b_3 = 0{,}2464;\quad b_4 = 3{,}996$

$b_5 = 5{,}073;\ b_6 = -7{,}984;\quad b_7 = -35{,}655$

Из системы (33) последовательно исключим x_0, x_1, x_2, x_3. Для этого, предыдущее уравнение умножим на a_0, полученное вычтем из последующего. Будем иметь систему из семи уравнений, где неизвестное x_0 исключено. Для исключения x_1 из этой системы, предыдущее уравнение умножим на a_1, полученное вычтем из последующего. В результате будем иметь систему из шести уравнений, где неизвестные x_0 и x_1 исключены. Продолжая процедуру, исключим также x_2 и x_3. В конечном итоге придем к следующей системе

$$\begin{aligned} &y_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = -b_4 \\ &b_1 y_0 + b_2 y_1 + b_3 y_2 + b_4 y_3 = -b_5 \\ &b_2 y_0 + b_3 y_1 + b_4 y_2 + b_5 y_3 = -b_6 \\ &b_3 y_0 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 = -b_7 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь обозначены.

$$\begin{aligned} &a_0 a_1 a_2 a_3 = y_0 \\ &a_0 a_1 a_2 + a_0 a_1 a_3 + a_0 a_2 a_3 + a_0 a_2 a_3 = -y_1 \\ &a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = y_2 \\ &a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -y_3 \end{aligned} \tag{35}$$

Так как, величины $b_i\ (i=\overline{1,7})$ известны, система (34) является линейной системой относительно неизвестных y_0, y_1, y_2, y_3, которые выражаются через неизвестные a_0, a_1, a_2, a_3 соотношениями Вьета (35). Предположим, что система (34) решена; найдены y_0, y_1, y_2, y_3. При известных y_0, y_1, y_2, y_3, из симметричной относительно a_0, a_1, a_2, a_3 системы (35) следует, что четыре величины a_0, a_1, a_2, a_3 являются корнями следующего многочлена (полинома) четвертой степени:

$$a^4 + y_3 a^3 + y_2 a^2 + y_1 a + y_0 = 0 \tag{36}$$

С учетом решения системы (34) уравнение (36) конкретизируется:

$$a^4 - 2{,}096a^3 + 5{,}602a^2 - 2{,}5255a + 2{,}4023 = 0 \tag{37}$$

Корни уравнения (37) будут:

$$\left.\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix}\right\} = 0{,}86957 \pm i1{,}9195; \quad \left.\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}\right\} = 0{,}17843 \pm i0{,}71354 \tag{38}$$

После определения a_0, a_1, a_2, a_3, величины x_0, x_1, x_2, x_3 легко находим из (33)

$$\left.\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix}\right\} = 0{,}01 \pm i0{,}96 \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = 0{,}49 \pm i0{,}281 \tag{39}$$

Теперь представляется возможность по формулам (31) и (32) находить $p_0, p_1, p_2, p_3; \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\left.\begin{matrix} p_0 \\ p_1 \end{matrix}\right\} = \left(-0{,}8152 \pm i2{,}2414\right)t^{-1}; \quad \left.\begin{matrix} p_2 \\ p_3 \end{matrix}\right\} = \left(0{,}90366 \pm i0{,}782\right)t^{-1} \tag{40}$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{matrix}\right\} = \left(-0{,}22333 \mp i0{,}0558\right)t^{-1}; \quad \left.\begin{matrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix}\right\} = \left(0{,}2231 \pm i0{,}63705\right)t^{-1} \tag{41}$$

Следовательно, определены все параметры формулы-обращения преобразования Лапласа седьмого порядка:

$$L_{VII}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = \varphi_0 F(p_0) + \varphi_1 F(p_1) + \varphi_2 F(p_2) + \varphi_3 F(p_3) \tag{42}$$

где $\varphi_0, p_0, \varphi_1, p_1, \varphi_2, p_2, \varphi_3, p_3$ представлены соотношениями (40), (41). Как видим, p_0 и p_1, p_2 и p_3 φ_0 и φ_1, φ_2 и φ_3 являются комплексными сопряженными величинами.

Представленные формулы- обращения могут быть использованы при определении функции - оригинала по численно заданным изображениям. Приведем соответствующую методику на основе, например, формулы (42). Предположим, что функция - изображение $F(p)$ может быть численно определено для любого p.

Для фиксированных значений $t = t_k\ (k = 1,2,\ldots)$ с использованием (40) и (41) находим:

$$p_{0k} = p_0\big|_{t=t_k};\quad p_{1k} = p_1\big|_{t=t_k};\quad p_{2k} = p_2\big|_{t=t_k};\quad p_{3k} = p_3\big|_{t=t_k}$$
$$\varphi_{0k} = \varphi_0\big|_{t=t_k};\quad \varphi_{1k} = \varphi_1\big|_{t=t_k};\quad \varphi_{2k} = \varphi_2\big|_{t=t_k};\quad \varphi_{3k} = \varphi_3\big|_{t=t_k}$$
$$(k = 1,2,\ldots)$$

Определяем также значения F при $p = p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}\ (k = 1,2,\ldots)$. При этом численные значения оригинала f при различных $t = t_k\ (k = 1,2,\ldots)$ находятся по следующей формуле, написанной на основе формулы (42):

$$f(t_k) = \varphi_{0k} F(p_{0k}) + \varphi_{1k} F(p_{1k}) + \varphi_{2k} F(p_{2k}) + \varphi_{3k} F(p_{3k})\,.$$

Полученные формулы обращения могут быть распространены на другие интегральные преобразование, поскольку они могут быть получены от интегрального преобразования Лапласа путем известных замен параметра и переменного. Преобразование Лапласа-Карсона, отличается от преобразования Лапласа множителем p:

$$F_{л-к}(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = pF_л$$

Преобразование Лапласа - Карсона часто также называют преобразованием Хевисайда. Формула обращения (14) в данном случае переходит к следующей формуле

$$f(t) = F_{л-к}(p_0)\Big|_{p_0=0,5615t^{-1}}.$$

Формулы (21) и (27) преобразуются соответственно к следующим соотношениям

$$f(t) = \left[xF_{л-к}(p) + \bar{x}F_{л-к}(\bar{p})\right]_{\substack{x=0,5+i0,348 \\ p=(0,5791+i1,0144)t^{-1}}}$$

$$f(t) = x_0F_{л-к}(p_0) + x_1F_{л-к}(p_1) + \bar{x}_1F_{л-к}(\bar{p}_1),$$

где $x_0 = 0,9225$; $x_1 = 0,03875 + i0,2975$; $p_0 = 1,3t^{-1}$; $p_1 = (0,205 + i2,0276)t^{-1}$

Формула же (42) переходит к соотношению

$$f(t) = x_0F_{л-к}(p_0) + x_1F_{л-к}(p_1) + x_2F_{л-к}(p_2) + x_3F_{л-к}(p_3),$$

где величины x_0, x_1, x_2, x_3 определяются формулами (39), p_0, p_1, p_2, p_3 – формулами (40).

Последние четыре формулы являются формулами обращения преобразования Лапласа - Карсона (Хевисайда) и определяют функцию - оригинал по заданным изображениям по Лапласу - Карсону (Хевисайду).

Теперь производем следующую замену: $p = -i\alpha$, $F(p) = F(-i\alpha) = \sqrt{2\pi}G(\alpha)$. В этом случае соотношение (1) преобразуется к виду

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt$$

Данное соотношение, как известно, является преобразованием Фурье функции $f(t)$. Формулы -обращения преобразования Фурье могут быть получены с использованием формул (14), (20), (26). Если воспользоваться формулой (14), то соответствующая формула - обращение Фурье будет следующей:

$$\mathscr{F}_I^{-1}\{G(\alpha)\} = f(t) = \left[-i\sqrt{2\pi}\alpha G(\alpha)\right]_{\alpha=i0,561t^{-1}}$$

Формула -обращение преобразования Фурье третьего порядка будет

$$\mathscr{F}_{III}^{-1}\{G(\alpha)\} = f(t) = \sqrt{2\pi}\left(\varphi_0G(\alpha_0) + \varphi_1G(\alpha_1)\right),$$

где φ_0 и φ_1 определяются формулами (18), (19). Кроме того,

$$\alpha_0 = (-1,0144 + i0,5791)t^{-1};\ \alpha_1 = (1,0144 + i0,5791)t^{-1}.$$

Напишем формулу пятого порядка

$$\mathscr{F}_V^{-1}\{G(\alpha)\} = f(t) = \sqrt{2\pi}\left[\varphi_0G(\alpha_0) + \varphi_1G(\alpha_1) + \varphi_2G(\alpha_2)\right]$$

Здесь φ_0 определяется второй формулой (23), φ_1 и φ_2 - формулами (25). Величины $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ будут следующими: $\alpha_0 = i \cdot 1,3t^{-1}$;

$$\alpha_1 = (-2{,}0276 + i0{,}205)t^{-1}; \quad \alpha_2 = (2{,}0276 + i0{,}205)t^{-1}.$$

С использованием (42) формула - обращение преобразования Фурье седьмого порядка имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}_{VII}^{-1}\{G(\alpha)\} = f(t) = \sqrt{2\pi}\left[\varphi_0 G(\alpha_0) + \varphi_1 G(\alpha_1) + \varphi_2 G(\alpha_2) + \varphi_3 G(\alpha_3)\right]$$

При этом величины $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ представляются формулами (41). Кроме того,

$$\alpha_0 = (-2{,}2414 - i0{,}8152)t^{-1}; \quad \alpha_1 = (2{,}2414 - i0{,}8152)t^{-1};$$

$$\alpha_2 = (-0{,}782 + i0{,}90366)t^{-1}; \qquad \alpha_3 = (0{,}782 + i0{,}90366)t^{-1}.$$

В заключении заметим, что полученные выше формулы для $x_0, x_1, \ldots, p_0, p_1, \ldots, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, a_0, a_1, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$, как и сами формулы обращения является универсальными, т.е. одинаковыми для всех функций - изображений.

Для других интегральных преобразований могут быть также выписаны аналогичные формулы - обращения.

Литература

[1]. Крылов В.И.,Скобля Н.С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.* -М.: Наука, 1974 223 с.

[2]. Кост Т. *Приближенное обращение преобразований Лапласа при анализе вязкоупругих напряжений .* - Ракетная техника и космонавтика, 1964 № 12 с.175- 181.

[3]. Schapery R.A. *An approximate method of stress analysis for large class of problem in vicoelasticity.* Purde Univ. School. Aeronaut and Eng. Sci Rept A and ES 62-12, 1963, 46 p.

[4]. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними* -М. Гос. изд. физ.-мат. лит. 1958, 439 с.

[5]. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалева Э.З. *Численные методы анализа* М.Госизд физ-мат. лит.,1962, 368 с.

[6]. Канторович Л.В., Крылов В.И.Приближенные методы высшего анализа.-Л.-М.: Госизд. физ. -мат. лит., 1949, 695 с.