УДК 517.948

АЛИЕВ Р.М.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

В работах [1,3,5,6] исследованы сходимость метода коллокации для одномерных интегральных и дифференциальных уравнений с помощью общей теории приближенных методов разработанной Л.В.Канторовичем.

В [4] исследованы возможность осуществления и быстрота сходимости метода коллокации для эллиптических уравнений и для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, когда в качестве узлов коллокации используется равномерная сетка узлов интерполяции.

В статье [2] изучена сходимость метода коллокации для многомерных интегральных уравнений.

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для дифференциального уравнения в частных производных вида

$$AU(x,y) \equiv \Delta U(x,y) - \lambda a(x,y)U(x,y) = f(x,y) \tag{1}$$

при условии

$$U(x,y)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

и доказывается сходимость метода коллокации для задачи {(1), (2)}, где Δ - оператор Лапласа, Γ - граница прямоугольника $D[a \le x \le b, c \le y \le d]$.

Пусть $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$ - неотрицательные функции, суммируемые соответственно на $[a,b]$ и $[c,d]$ вместе с $1/\rho_1(x)$ и $1/\rho_2(y)$. Обозначим через $x_{in}(i=0,1,\ldots,n)$ и $y_{km}(k=0,1,\ldots,m)$ нули полиномов $\omega_n(x)$ и $\omega_m^*(y)$, соответственно, где $\{\omega_n(x)\}$ и $\{\omega_m^*(y)\}$ системы ортогональных полиномов относительно веса $\rho_1(x)$ и $\rho_2(y)$, соответственно, на $[a,b]$ и $[c,d]$.

Приближенное решение задачи {(1), (2)} ищем в виде

$$U_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{ik} V_{in,km}(x,y), \tag{3}$$

где $V_{in,km}(x,y)$ - известные функции, удовлетворяющие условиям

$$\Delta V_{in,km}(x,y) = l_{in}(x) l_{km}^*(y)$$
$$V_{in,km}(x,y)\big|_{\Gamma} = 0$$
$$(i=0,1,\ldots,n; k=0,1,\ldots,m),$$

где $l_{in}(x)$ и $l_{km}^*(y)$ - фундаментальные полиномы интерполирования. Неизвестные коэффициенты c_{ik} согласно методу коллокации определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} Au_{n,m}(x_i,y_k) - f(x_i,y_k) = 0 \\ (i=0,1,\ldots,n; k=0,1,\ldots,m) \end{gathered} \tag{4}$$

Введем пространство $L_{2,\rho_1\rho_2}(D)$ квадратично суммируемых в D по весу $\rho_1(x),\rho_2(y)$ функций $Z(x,y)$ с нормой

$$\|Z\|_{L_{2,\rho_1\rho_2}} = \left(\iint_D \rho_1(x)\rho_2(y)|Z(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

Теорема. *Пусть*

1) $a(x,y)$ и $f(x,y)$ - непрерывные функции в прямоугольнике $D\{a \le x \le b,\ c \le x \le d\}$.

2) λ не является собственным числом задачи {(1), (2)}.

Тогда при достаточно больших n и m система уравнений (4) имеет единственное решение и приближенные решения $U_{n,m}(x,y)$ сходятся при $n,m \to \infty$ равномерно к точному решению $U_0(x,y)$ задачи {(1), (2)} с быстротой

$$\max_{[x,y]\in D}|U_{n,m}(x,y)-U_0(x,y)| = O\left(E_{n,m}(\Delta U_0(x,y))\right), \tag{5}$$

а последовательность $\Delta U_{n,m}(x,y)$ стремится к $\Delta U_0(x,y)$ среднеквадратично с весом $\rho_1(x)\rho_2(y)$ с быстротой

$$\|\Delta U_{n,m}(x,y)-\Delta U_0(x,y)\|_{L_{2,\rho_1\rho_2}} = O\left(E_{n,m}(\Delta U_0(x,y))\right), \tag{5'}$$

где $E_{n,m}(\Delta U_0(x,y))$ - наилучшее равномерное приближение функции $\Delta U_0(x,y)$ полиномами степени не выше n относительно x и степени не выше m относительно y.

Доказательство. Пусть $G(x,y,t,\tau)$ есть функция Грина оператора Δ с краевым условием (2). Положив $\Delta U(x,y) = Z(x,y)$ будем иметь

$$U(x,y) = \iint_D G(x,y,t,\tau)Z(t,\tau)dtd\tau \tag{6}$$

В силу равенства (6) задача {(1), (2)} сводится к интегральному уравнению

$$Z(x,y) = \lambda\iint_D K(x,y,t,\tau)Z(t,\tau)dtd\tau + f(x,y), \tag{7}$$

где $K(x,y,t,\tau) = a(x,y)G(x,y,t,\tau)$.

Пусть $P_{n,m}$ - линейный проекционный оператор, ставящий любой определенной на D функции в соответствие её итерполяционный полином Лагранжа степени n относительно x и степени m относительно y, построенный по узлам x_{in} и y_{km}.

Так как приближенное решение $U_{n,m}(x.y)$ удовлетворяет краевому условию (2), то

$$U_{n,m}(x,y) = \iint_D G(x,y,t,\tau)\Delta U_{n,m}(t,\tau)dtd\tau \tag{8}$$

Учитывая (8), систему (4) можно переписать в виде

$$\Delta U_{n,m}(x_i,y_k) = \lambda\iint_D K(x_i,y_k,t,\tau)\Delta U_{n,m}(t,\tau)dtd\tau + f(x_i,y_k) \tag{9}$$

Учитывая (3), из (9) получим

$$c_{ik} = \lambda\iint_D K(x_i,y_k,t,\tau)\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} c_{ik} l_{in}(t) l^*_{km}(\tau)\right)dtd\tau + f(x_i,y_k) \tag{10}$$

$$\left(i=0,1,\ldots,n;\, k=0,1,\ldots,m\right)$$

Умножив систему (10) на $\Delta V_{in,km}(x,y)$ $\left(l_{in}(x)l^{*}_{km}(y)\right)$ будем иметь

$$c_{ik}\Delta V_{in,km}(x,y)=\lambda\iint_{D} l_{in}(x)l^{*}_{km}(y)K(x_i,y_k,t,\tau)\Delta U_{n,m}(t,\tau)dtd\tau+f(x_i,y_k)l_{in}(x)l^{*}_{km}(y)$$

Отсюда получим

$$\Delta U_{n,m}(x,y)=\lambda\iint_{D} P_{n,m}\left[K(x,y,t,\tau)\right]\Delta U_{n,m}(t,\tau)dtd\tau+P_{n,m}\left[f(x,y)\right], \qquad (11)$$

где

$$P_{n,m}\left[K(x,y,t,\tau)\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}K(x_i,y_k,t,\tau)l_{in}(x)l^{*}_{km}(y)$$

$$P_{n,m}\left[f(x,y)\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}f(x_i,y_k)l_{in}(x)l^{*}_{km}(y)$$

интерполяционные полиномы Лагранжа соответственно функций $K(x,y,t,\tau)$ и $f(x,y)$. Положив $\Delta U_{n,m}(x,y)=Z_{n,m}(x,y)$ интегральное уравнение (11) можно переписать в виде

$$Z_{n,m}(x,y)=\lambda\iint_{D} P_{n,m}\left[K(x,y,t,\tau)\right]Z_{n,m}(t,\tau)dtd\tau+P_{n,m}\left[f(x,y)\right] \qquad (12)$$

Таким образом, задача {(1), (2)} эквивалентна интегральному уравнению (7), а система уравнений (4)- интегральному уравнению (12), т.е. если $Z(x,y)=\Delta U_0(x,y)$ и $Z_{n,m}(x,y)=\Delta U_{n,m}(x,y)$ являются решениями интегральных уравнений (7) и (12) соответственно, то

$$U_0(x,y)=\iint_{D} G(x,y,t,\tau)\Delta U_0(t,\tau)dtd\tau \qquad (13)$$

и

$$U_{n,m}(x,y)=\iint_{D} G(x,y,t,\tau)\Delta U_{n,m}(t,\tau)dtd\tau \qquad (14)$$

являются точным и приближенным решением задачи {(1), (2)}.

Теперь интегральные уравнения (7) и (12) рассмотрим как линейные операторные уравнения

$$Z=TZ+f \qquad (15)$$

и

$$Z_{n,m}=P_{n,m}TZ_{n,m}+P_{n,m}f \qquad (16)$$

в пространстве $L_{2,\rho_1\rho_2}(D)$,

где $TZ=\iint_{D} K(x,y,t,\tau)Z(t,\tau)dtd\tau$.

Теперь докажем, что интерполяционный полином Лагранжа любой непрерывной функции $Z(x,y)$, построенный по узлам $(x_{in},y_{km})(i=0,1,\ldots,n;\, k=0,1,\ldots,m)$ интерполяции среднеквадратично с весом $\rho_1(x)\rho_2(y)$ сходится к приближенной функции $Z(x,y)$.

Пусть $Q_{n,m}(x,y)$ - алгебраический полином степени n относительно x и степени m относительно y наилучшего приближения непрерывной функции $Z(x,y)$ на D. Тогда для всех $(x,y)\in D$

$$\left|Z(x,y)-Q_{n,m}(x,y)\right|\le E_{n,m}(Z) \tag{17}$$

Учитывая неравенство (17) и равенство

$$P_{n,m}\left(Q_{n,m}(x,y)\right)=Q_{n,m}(x,y),$$

получим неравенство

$$\left(\iint_D \rho_1(x)\rho_2(y)\left[Z(x,y)-P_{n,m}\left(Z(x,y)\right)\right]^2 dxdy\right)^{1/2} \le$$
$$\le 2E_{n,m}(Z)\left(\iint_D \rho_1(x)\rho_2(y)dxdy\right)^{1/2} \tag{18}$$

Из неравенства (18) следует аналог известной теоремы Эрдеш-Туран о среднеквадратичной сходимости интерполяционного полинома для функций одной переменной.

Тогда последовательность операторов $P_{n,m}$, рассматриваемых как операторы из $C(D)$ в $L_{2,\rho_1\rho_2}(D)$ сильно стремится к оператору вложения J пространства $C(D)$ в пространство $L_{2,\rho_1\rho_2}(D)$. Следовательно, по теореме Банаха-Штейнхауза нормы операторов $P_{n,m}\in\left[C(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\right]$ ограничены по совокупности:

$$\left\|P_{n,m}\right\|\le M \quad \left(P_{n,m}\in\left[C(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\right]\right)$$
$$(n=1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots)$$

Из свойства функции Грина $G(x,y,t,\tau)$ следует, что оператор T является вполне непрерывным как оператор, переводящий пространство $L_{2,\rho_1\rho_2}(D)$ в пространство $C(D)$. Теперь помножив операторы $P_{n,m}\in\left[C(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\right]$справа на вполне непрерывный оператор $T\in\left[L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\to C(D)\right]$ получим последовательность операторов $P_{n,m}T\in\left[L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\right]$, которая стремится к оператору T по норме:

$$\left\|P_{n,m}T-T\right\|\to 0 \ \text{ при } n,m\to\infty$$
$$\left(T, P_{n,m}T\in\left[L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\right]\right).$$

Тогда в силу теоремы 15.3 ([7] стр.200) для достаточно больших n и m интегральное уравнение однозначно разрешима, а это равносильно однозначной разрешимости системы уравнений (4). Так как уравнение (16) однозначно разрешимо, то для достаточно больших n и m операторы $E-P_{n,m}T$ обратимы и нормы обратных операторов ограничены в совокупности:

$$\left\|\left(E-P_{n,m}T\right)^{-1}\right\|\le N \quad \left(\left(E-P_{n,m}T\right)^{-1}\in\left[L_{2,\rho_1\rho_2}(D)\to L_{2,\rho_1\rho_2}\right]\right) \tag{19}$$

Учитывая неравенство (19), из равенства

$$\left(E-P_{n,m}T\right)\left(Z_0-Z_{n,m}\right)=Z_0-P_{n,m}Z_0$$

получим неравенство

$$\left\|Z_0 - Z_{n,m}\right\|_{L_{2,\rho,\rho_1}(D)} \le N\left\|Z_0 - P_{n,m}Z_0\right\|_{L_{2,\rho,\rho_1}(D)} \tag{20}$$

Из неравенств (18) и (20) следует соотношение (5).

Из равенств (13) и (14) получим

$$U_0(x,y) - U_{n,m}(x,y) = \iint_D G(x,y,t,\tau)\left[\Delta U_0(t,\tau) - \Delta U_{n,m}(t,\tau)\right]dt d\tau \tag{21}$$

Применяя неравенство Буняковского и учитывя неравенство (20), получим соотношение (5’).

Литература

[1]. Вайникко Г.М. *О сходимости и устойчивости метода коллокации.* Диф. уравнения, 1995, т.1., №2, с.244-254.

[2]. Вайникко Г.М. *О сходимости метода коллокации для многомерных интегральных урвнений.* Ученые записки Тартуского ун-та, 1970, т. 253, №9, с.244-257.

[3]. Карпиловская Э.Б. *О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Успехи матем. наук, 1953, т.8, №3, с.111-118.

[4]. Карпиловская Э.Б. *О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики.* Сиб. мат. журн., 1963, т.4, №3, с.632-640.

[5]. Карпиловская Э.Б. *О сходимости метода коллокации.* Докл. АН СССР, 1963, т.151, №4, с.766-769.

[6]. Киш О.О. *О сходимости метода коллокации.* Acta math. Acad. Scient.hung., 1966, т.17, №3-4, с.433-442.

[7]. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* Москва, 1969.

Əliyev R.M. KOLLOKASİYA ÜSULUNUN YIĞILMASI HAQQINDA

İşdə elliptik tənlik üçün kollokasiya üsulunun yığılması göstərilir və onun yığılma sürəti tapılır.

Aliev R.M. ON CONVERGENCE OF A COLLOCATION METHOD

Convergence of a collocation method for an elliptic equation is shown and it’s convergence rate is found in the paper.