1998 ТОМ IX(XVII)

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УДК 539.3: 517.9

АБДУЛЛАЕВ У.Г., ЭФЕНДИЕВА Н.Н.

О КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассматривается задача нестационарной фильтрации в пористой среде. За основу принимается обобщенный закон Дари, в котором предполагается, что равновесное состояние между скоростью фильтрации и градиентом давления достигается не мгновенно, а с некоторым запаздыванием. Найдены условия для конечной скорости распространения возмущений и локализации граничных режимов с обострением.

Известно, что основным законом нестационарной фильтрации в пористой среде является классический закон Дарси, в котором предполагается, что равновесное состояние между градиентом давления и скоростью достигается мгновенно. На самом деле «равновесность» достигается с некоторым запаздыванием и чтобы учесть это явление в реологических уравнениях v и давление P заменяются на $v+\lambda_v dv/dt$, $p+\lambda_p dp/dt$, где $\lambda_v>0, \lambda_p>0$ - времена релаксации скорости и давления соответственно. В этом случае, в линейном приближении вместо закона Дари имеет место уравнение

$$v+\lambda_v\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{k}{\mu}\left(P+\lambda_p\frac{\partial P}{\partial t}\right), \qquad (1)$$

где к>0 -коэффициент проницаемости пористой среды, $\mu>0-$ вязкость фильтрирующейся жидкости [1,2]. Аналогичному реологическому уравнению удовлетворяют линейные вязкоупругие жидкости Олдройда [3,4]. Закон реалаксационной фильтрации (1) описывает также процессы фильтрации капельно-сжимаемой жидкости в трещиновато- пористых, кавернозных средах [5].

В данной работе предполагается, что время релаксации λ_p функционально зависит от давления, т.е. $\lambda_p\equiv\lambda(p)$, где λ -непрерывная функция на $[0;\infty)$, $\lambda(0)=0$ и $\lambda(p)>0$ при $p>0$. Доказано, что в этом случае, даже при сколь-угодно малом $\lambda(p)$ имеют место эффекты, которые в линейном случае отсутствуют.

Следуя предположениям теории упругого режима [2,5] соотношение (1) приводит к следующему квазилинейному уравнению релаксационной фильтрации:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\lambda_v\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=\chi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P+\lambda(p)\frac{\partial P}{\partial t}\right), \qquad (2)$$

где- $\chi>0$ - коэффициент пьезопроводности.

Из закона фильтрации (1) следует, что физический смысл имеют лишь такие обобщенные решения уравнения (2), которые непрерывны и имеют непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(p)\frac{\partial P}{\partial t}\right)$.

Исследуем вопрос о конечной скорости распространения возмущений процессов, описываемых уравнением (2). Как известно, уравнение (2), в случае $\lambda(p) = const$, такого свойства не имеет и начально-граничные возмущения распространяются с бесконечной скоростью [6].

Предположим, что

$$\int_0^1 \lambda(\eta)\left[\int_0^\eta \xi\lambda(\xi)d\xi\right]^{-\frac{1}{2}} d\eta < \infty. \quad (3)$$

В этом случае имеет смысл функция

$$\Phi(u) = \int_0^u \lambda(\eta)\left[\int_0^\eta \xi\lambda(\xi)d\xi\right]^{-\frac{1}{2}} d\eta \geq 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

В силу монотонности Φ существует обратная функция $\Phi^{-1}(v)$, при $0 \leq v < \Phi_* \equiv \Phi(\infty)$ и $\Phi^{-1}(0) = 0$. Обозначим

$$\varphi(x) = \left[\lambda(\Phi^{-1}(x))\right]^{-1}\left[\int_0^{\Phi^{-1}(x)} \eta\lambda(\eta)d\eta\right]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq x < \Phi_*.$$

Пусть выполнено условие

$$\lim_{x\to 0+} \varphi(x) = 0. \quad (4)$$

Построим частное автомодельное решение уравнения (2) типа бегущей волны

$$p(x,t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_*}}t - x \geq 0.$$

Подставляя эту функцию в (2) имеем

$$f'(\xi) = \chi(\lambda(f)f'(\xi))'',$$

откуда

$$f(\xi) = \chi(\lambda(f)f'(\xi))' + C, \quad (5)$$

где C- произвольная постоянная. Полагая C=0 (ниже будет ясна причина этого предположения) обыкновенное дифференциальное уравнение (5) приводится к следующей системе двух уравнений 1-го порядка

$$\chi\lambda(f)f'(\xi) = g(\xi), \quad g'(\xi) = f(\xi).$$

Отсюда получается

$$\chi\lambda(f)fdf = gdg. \quad (6)$$

Интегрируя (6), а также учитывая, что при $f = 0$, $g = \chi\lambda(f)f'(\xi) = 0$ имеем

$$g(\xi) = \sqrt{2\chi}\left[\int_0^f \eta\lambda(\eta)d\eta\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Подставляя в (7) $g = \chi\lambda(f)f'$, получим следующее уравнение в разделенных переменных

$$\lambda(f)\left[\int_0^f \eta\lambda(\eta)d\eta\right]^{-\frac{1}{2}} df = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}d\xi \tag{8}$$

Интегрируя (8), при условии (3) имеем

$$\Phi(f(\xi)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}(\xi-\xi_0), \quad \xi \geq \xi_0.$$

Полагая $\xi_0 = 0$, отсюда получим

$$f(\xi) = \Phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\xi\right), \quad 0 \leq \xi < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\Phi_*, \quad f(0) = 0.$$

Продолжим $f(\xi)$ нулем в область $\{\xi < 0\}$. Так как $\Phi^{-1}(0) = 0$, то непрерывность $f(\xi)$ при этом не нарушится. Так как, кроме того

$$f'(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}(\Phi'(u))^{-1}\Big|_{u=\Phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\xi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\xi\right),$$

$$(\lambda(f)f'(\xi))' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\Phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\xi\right),$$

то при условиях (3), (4) функции $f'(\xi)'$, $(\lambda(f)f'(\xi))'$ являются непрерывным, при $0 \leq \xi < \sqrt{\chi/2}\Phi_*$ и остаются таковыми после указанного продолжения в область $\{\xi < 0\}$. Это означает, что скорость фильтрации v и давление P остаются непрерывными на фронте волны $x = \sqrt{\chi/\lambda_v}t$ после продолжения нулем в область $x \geq \sqrt{\chi/\lambda_v}t$. Теперь ясна причина предположения $C = 0$ в (5), так как в противном случае нарушается непрерывность функции $(\lambda(f)f'(\xi))'$, при $\xi = 0$. Таким образом, построено следующее обобщенное решение уравнения (2)

$$P(x,t) = \begin{cases} \Phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\chi}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_v}}t - x\right)\right), & 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_v}}t \\ 0, & x \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_v}}t \end{cases} \tag{9}$$

Это решение существует в течение времени $0 \leq t < T_* \equiv \sqrt{\lambda_v/2}\Phi_* \leq \infty$. Решение (9) удовлетворяет следующим начально- краевым условиям в Ω

$$P(x,0) = 0, \quad \frac{\partial P(0,x)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x < \infty \tag{10}$$

$$P(0,t) = \Phi^{-1}\left(\sqrt{2/\lambda_v t}\right), \quad P(\infty,t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение (2) имеет решение, которое при каждом $t \in [0;T_*)$ является финитным по x: $P(x,t) = 0$, при $x \geq \sqrt{\chi/\lambda_v}t$.

Пусть $\Phi_* < \infty$, т.е. $T_* < \infty$. Как видно из (11) $P(0,t) \to \infty$, при $t \to T_* - 0$, т.е. имеет место граничный режим с обострением [7]. Однако, несмотря на это, как видно из (11), возмущения локализованы на ограниченном стрезке $[0;x_*]$, где $x_* = \sqrt{\chi / 2}\Phi_*$. Кроме того, существует предельное распределение давления в момент обострения T_*

$$P(x,T_*) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\Phi_* - \sqrt{2/\chi}x), & 0 \le x \le x_* \\ 0, & x \ge x_* \end{cases}$$

и $P(x,T_*) < \infty$, при $x > 0$. В терминологии [7], это означает, что имеет место LS режим с обострением. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Пусть $\lambda(P) = P^n$. Нетрудно проверить, что условие (3) выполняется при n>0. Условие (4) выполняется при $0 < n < 2$. Таким образом, при $\lambda(P) = P^n$, $0 < n < 2$ уравнение (2) имеет решение

$$P(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{\sqrt{2\chi(n+2)}}\left(\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t - x\right)\right]^{\frac{2}{n}}, & 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t \\ 0, & x \ge \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t, \quad 0 \le t < \infty \end{cases} \tag{12}$$

при начальных условиях (10) и граничных условиях

$$P(0,t) = \left[\frac{n}{\sqrt{2\lambda_v(n+2)}}t\right]^{\frac{2}{n}}, \quad P(\infty,t) = 0, \quad 0 \le t < \infty$$

При каждом t>0 решение P(x,t) имеет ограниченный носитель $\left[0;\sqrt{\chi/\lambda_v}t\right]$, в котором является выпуклой функцией по x. Отметим, что формально решение (12) удовлетворяет уравнению (2), также при $n \ge 2$. При этом сохраняется непрерывность функции $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(p)\dfrac{\partial P}{\partial x}\right)$, однако в точках фронта волны $x = \sqrt{\chi/\lambda_v}t$ нарушается непрерывность производных $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial t}$.

Рассмотрим пример LS - режима с обострением для уравнения (2). Пусть $\lambda(p) = \varepsilon\lambda_1(p)$, где $\varepsilon > 0$ произвольное

$$\lambda_1(p) = \frac{(1+P)^{1/2}\ln\left[P^{1/2} + (1+P)^{1/2}\right] - P^{1/2}}{4P^{1/2}(1+P)} \tag{13}$$

В этом случае уравнение (2) имеет решение

$$P(x,t) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{2}{\varepsilon\chi}\left(\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t - x\right)^2\right]^{-1} - 1, & 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t \\ 0, & x \ge \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}}t, \end{cases} \tag{14}$$

при $0 \le t < T_* = \sqrt{\varepsilon\lambda_v}/\sqrt{2}$. Решение (14) удовлетворяет начальным условиям (10) и граничным условиям видно из (11), возмущения локализованы на ограниченном стрезке $[0; x_*]$, где $x_* = \sqrt{\chi / 2}\Phi_*$. Кроме того, существует предельное распределение давления в момент обострения T_*

$$P(x, T_*) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\Phi_* - \sqrt{2/\chi} x), & 0 \le x \le x_* \\ 0, & x \ge x_* \end{cases}$$

и $P(x, T_*) < \infty$, при $x > 0$. В терминологии [7], это означает, что имеет место LS режим с обострением. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Пусть $\lambda(P) = P^n$. Нетрудно проверить, что условие (3) выполняется при n>0. Условие (4) выполняется при $0 < n < 2$. Таким образом, при $\lambda(P) = P^n$, $0 < n < 2$ уравнение (2) имеет решение

$$P(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{\sqrt{2\chi(n+2)}} \left(\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t - x \right) \right]^{\frac{2}{n}}, & 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t \\ 0, & x \ge \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t, \quad 0 \le t < \infty \end{cases} \tag{12}$$

при начальных условиях (10) и граничных условиях

$$P(0,t) = \left[\frac{n}{\sqrt{2\lambda_v (n+2)}} t \right]^{\frac{2}{n}}, \quad P(\infty, t) = 0, \quad 0 \le t < \infty$$

При каждом t>0 решение P(x,t) имеет ограниченный носитель $\left[0; \sqrt{\chi / \lambda_v} t\right]$, в котором является выпуклой функцией по x. Отметим, что формально решение (12) удовлетворяет уравнению (2), также при $n \ge 2$. При этом сохраняется непрерывность функции $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(p) \dfrac{\partial P}{\partial t} \right)$, однако в точках фронта волны $x = \sqrt{\chi / \lambda_v} t$ нарушается непрерывность производных $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial P}{\partial t}$.

Рассмотрим пример LS - режима с обострением для уравнения (2). Пусть $\lambda(p) = \varepsilon \lambda_1(p)$, где $\varepsilon > 0$ произвольное

$$\lambda_1(p) = \frac{(1+P)^{1/2} \ln\left[P^{1/2} + (1+P)^{1/2} \right] - P^{1/2}}{4P^{1/2}(1+P)} \tag{13}$$

В этом случае уравнение (2) имеет решение

$$P(x,t) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{2}{\varepsilon\chi} \left(\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t - x \right)^2 \right]^{-1} - 1, & 0 \le x \le \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t \\ 0, & x \ge \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\lambda_v}} t, \end{cases} \tag{14}$$

при $0 \le t < T_* = \sqrt{\varepsilon \lambda_v} / \sqrt{2}$. Решение (14) удовлетворяет начальным условиям (10) и граничным условиям

$$P(0,t) = \left[1 - \frac{2}{\varepsilon\lambda_{\infty}}t^2\right]^{-1} - 1, \quad P(\infty,t) = 0, \quad 0 < t < T_*$$

Как видно $P(0,t) \to \infty$, при $t \to T_* - 0$ и за время обострения волна проникает на конечную глубину $x_* = \sqrt{\varepsilon\chi}/\sqrt{2}$ и $P(x,t) = 0$, при $x \geq x_*$, $0 \leq t \leq T_*$. При этом решение $P(x,t)$ кроме точки $x = 0$, равномерно по $t \in [0; T_*]$, ограничено предельной кривой $P(x,T_*)$

$$P(x,t) \leq P(x,T_*) = \begin{cases} \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon\chi}}x\right)^2\right]^{-1} - 1, & 0 < x \leq x_* \\ 0, & x \geq x_* \end{cases}$$

Как видно из (13) за счет выбора $\varepsilon > 0$, функция $\lambda(P)$ может быть сделана сколь-угодно малой, однако несмотря на это, функциональная зависимость $\lambda(P)$ приводит к эффекту локализации граничного режима с обострением. Подобные нелинейные эффекты связаны качественным видом зависимости $\lambda(P)$. Как видно, $\lambda(0) = 0$ и $\lim\limits_{P\to\infty} \lambda(P) = 0$ и поэтому при $P = 0$ и $P = \infty$ уравнение (2) вырождается и превращается в волновое уравнение. Это и является причиной конечной скорости распространения и локализации граничных режимов с обострением. Численные расчеты, проведенные для многочисленных примеров с $\lambda(P)$, подтверждают такой вывод.

Таким образом, из полученных результатов можно заключить, что даже при сколь угодно малых временах релаксации, учет нелинейности приводит к качественно новым эффектам в неравновесной фильтрации. В частности эффект локализации давления дает возможность концентрации практически любого количества энергии в ограниченной среде и удержания его за конечное время без распространения за область локализации.

Авторы выражают благодарность А.Х.Мирзаджанзаде за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

[1]. Мирзаджанзаде А.Х, Ширинадзе С.А. *Повышение эффективности и качества бурения глубоких скважин.* М.: Недра, 1986, 278 с.

[2]. Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В. *Релаксационная фильтрация.* Казань, Изд. КГУ, 1980 , 136 с.

[3]. Oldroyd J.G. *Non-Linear stress, rate of strain relations at finite rate of Shear in co-called «Linear» elastico-viscous liquids.* Second order effects in elasticity, plasticity and feuid dynamics: Proc. Intern. Symp, 1962, London, 1964, p.520-529.

[4]. Уилкинсон У.Л. *Неньютоновские жидкости* М.: Мир, 1964, 216 с.

[5]. Баренбалатт Г.И. Ентов В.М., Рыжин И.М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.* М.: Недра, 1972.

[6]. Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* М.: Мир, 1977, 338 с.

[7]. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.А. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений* .М.: Наука, 1987, 477с.