1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 519.8

АЛИЕВ А.Г.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В связи с тем, что любой процесс в природе, как правило, многопараметричен, полный набор статических данных таких процессов, сложен, да и в принципе, невозможен. В связи с этим в разработке глобальных моделей в статистической теории используются приближенные методы апраксимации (методы Ньютона, Гаусса, Крылова, способ неименных квадратов Гаусса ; обобщенные на их основе интегральные методы) [1-4].

Однако остается открытым научное обоснование приложи мости математического аппарата к статистическим таблицам, описывающие экономический процессы.Точнее, необходимо согласование экономических принципов с применяемой математической аксиоматикой и теорией. Основным вопросам на этом пути является отсутствие специального постулата и принципа определенности экономического процесса, позволяющий сформулировать необходимое и достаточное условия, а также, установить границы применимости того или иного математического аппарата для обработки статистических данных.

В связи вышеизложенным, в статье предлагается:
-принцип определенности экономического процесса,
-метод построения динамической модели для исследования экономических задач,
-способ определения функций влияния неучтенных параметров,
-математический способ прогнозирования и управления процессом производства,
-приложение теории к расчету конкретных модельных экономических задач.

Принцип определенности экономического процесса

При исследовании экономических проблем, данных в виде статических таблиц (точек), следует считать что экономический процесс, определяемый целевой функцией, является неоднородным, т.е. разным в различных статических точках и нестационарным- изменяющими с течением времени. Однако в малой окрестности статического значения точки, вследствие принятия предположения устойчивости рассматриваемого экономического процесса, экономический процесс в точке и ее окрестности следует считать однородным. Это обстоятельство позволяет установить соответствие между рассматриваемыми кусочно- однородными окрестностями соседних статических точек и изменением экономического процесса на всем интервале времени.

Быстрое же (или скачкообразное) изменение однородного состояния в окрестности статической точки характерно неустойчивости экономического процесса в точке.

Процесс изменения во времени экономического процесса (целевой функции) при переходе от точки к точке различны и находятся в прямой зависимости от влияния внешних факторов, именуемых нами функциями влияния неучтенных параметров.

Из принципа определенности следует, рассматриваемый процесс будет однородным, если на выбранном интервале переменной таблица статических данных или числовая экспериментальная зависимость функции от времени получены при одинаковых внешних условиях $y = y(t, \lambda_i^*)$. В математическом плане это означает, что в случае однородного процесса целевая функция $y = y(t, \lambda_i^*)$ во всех статических точках и ее окрестностях есть аналитическая функция. А скорость изменения процесса на рассматриваемом интервале времени должна быть постоянной $y_t' = y_t'(t, \lambda_i^*) = const$.

Метод построения динамической модели для исследования экономических задач и способ определения функций влияния неучтенных параметров

Пусть дана статическая таблица $\{t_i, y_i(t)\}$, описывающая некоторый экономический процесс. Известными приближенными методами [1-4] аппроксимируем эту систему n кусочно- линейными функциями $y_n(t, \lambda_n)$.

Из принципа определенности экономического процесса следует, что во всех точках каждого кусочного интервала (t_n, t_{n+1}) рассматриваемые функции каждая в себе являются однородными, т.е. функции $y_n(t, \lambda_n)$ аналитичны, а производные этих функций $y_n' = y_n'(t, \lambda_n^*) = const$. Причем степень однородности каждой функций различны между собой.

На основе этих кусочно -линейных функций $y_n(t, \lambda_n)$, построим единую функцию следующим образом.

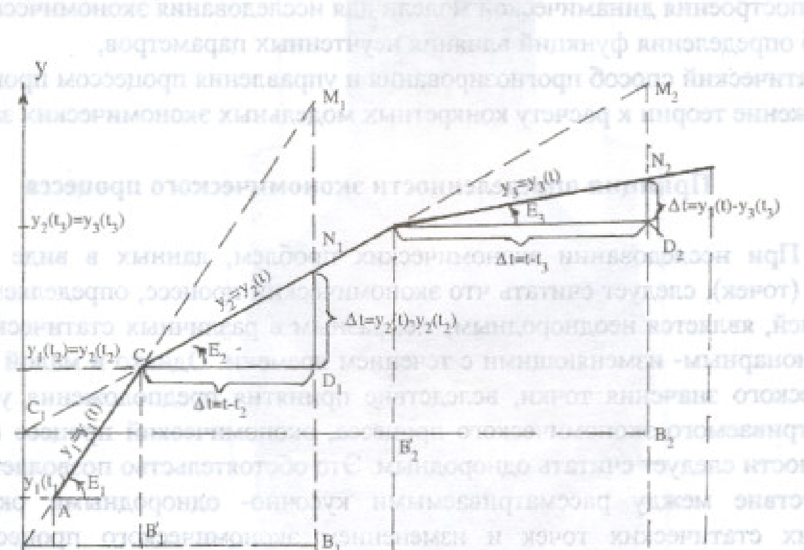

Рис 1.

Известно, что каждая статическая точка есть точечный результат в фиксированном времени процесса, полученного при соблюдении определенных внешних факторов. Следовательно, каждая кусочно- линейная функция получена при соблюдении определенных внешних факторах присущих каждому интервалу времени. Таким образом, на различных интервалах времени на экономическом процессе будет печать воздействия различных внешних факторов. В связи с этим, все кусочно- линейные функции $y_n(t,\lambda_n)$ выразим с помощью 1-ой линейно - кусочной функции $y_1 = y_1(t)$ и возникающих добавочных функций $\omega_n(t,\lambda_n)$. Функции $\omega_n(t,\lambda_n)$ будем именовать функциями влияния неучтенных параметров или функциями влияния внешних факторов. Возникновение функций $\omega_n(t,\lambda_n)$ связано с тем, что скорость экономического процесса на различных интервалах времени не одинаковы.

Согласно рисунка 1 продолжим 1-ую прямую и затем из точки M_1 этой прямой соответствующей координате t $(t_2 \le t \le t_3)$ опустить перпендикуляр M_1Q_1 на ось t. Обозначим отношение M_1N_1 к M_1B_1 через $\omega_2(t,\lambda_2)$:

$$\omega_2(t,\lambda_2) = \frac{M_1N_1}{M_1B_1} \tag{1}$$

Для точек t, находящихся в интервале $(t_2 \le t \le t_3)$ имеем (рис. 1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2(t) - y_2(t_2)}{t - t_2} = E_2 \tag{2}$$

$$y_1(t) = E_1(t - t_1) + y_1(t_1) \tag{3}$$

Из (2)-(3) с учетом условия сопряжения кусочно-линейных функций в точке $t = t_2$ $y_1(t_2) = y_2(t_2)$, определим зависимость всех точек 2-ой кусочно-линейной прямой с учетом фактора разности скорости экономического процесса и вида 2-ой прямой в виде:

$$y_2(t,\lambda_2) = E_1[1 - \omega_2(t,\lambda_2)]t + y_1(t_1) - E_1 t_1 \tag{4}$$

Здесь E_1 и E_2- тангенсы углов наклона прямых $y_1 = y_1(t)$ и $y_2 = y_2(t)$; $\lambda_2 = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1}$ - параметр влияния неучтенных факторов, воздействующая на 2-ую кусочно-линейную функцию на интервале времени $(t_2 \le t \le t_3)$,

$$\omega_2(t,\lambda_2) = \frac{E_1 - E_2}{E_1}\left(1 - \frac{t_2}{t}\right) = \lambda_2\left(1 - \frac{t_2}{t}\right) \tag{5}$$

есть функция влияния неучтенных параметров, воздей ствующая на 2-ую кусочно-линейную функцию на интервале времени $(t_2 \le t \le t_3)$. Причем:

$\omega_2(t,\lambda_2) = 0$ при $t \le t_2$

$$\omega_2(t_3,\lambda_2) = \lambda_2\left(1 - \frac{t_2}{t_3}\right) = \frac{E_1 - E_2}{E_1}\left(1 - \frac{t_2}{t_3}\right) \text{ при } t = t_3.$$

Частный случай. Если 1-ая кусочно-линейная функция проходит через начало координат, то $y_1(t_1) = 0$, $t_1 = 0$, а формула (4) примет вид:

$$y_2(t) = E_1(1 - \omega_2(t,\lambda_2))t \tag{6}$$

Рекуррентным способом легко выразит любую кусочно -линейную функцию

$y_n(t,\lambda_n)$ через 1-ую кусочно-линейную функцию и всех функций влияния неучтенных параметров $\omega_n(t_{n+1},\lambda_n)$, воздействующих на общих интервале времени (t_1,t_n) в виде:

$$y_n(t,\lambda_n) = E_1 t[1-\omega_n(t,\lambda_n)]\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)] + y_1(t_1) - E_1 t_1 \quad (7)$$

Где

$$\lambda_n = \frac{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)] - \frac{E_n}{E_1}}{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)]} \quad (8)$$

$$\omega_n(t,\lambda_n) = \lambda_n\left(1-\frac{t_n}{t}\right) = \frac{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)] - \frac{E_n}{E_1}}{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)]}\left(1-\frac{t_n}{t}\right) \quad (9)$$

Здесь

$\omega_n(t,\lambda_n) = 0$ для $t \le t_n$

$$\omega_n(t_{n+1},\lambda_n) = \frac{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)] - \frac{E_n}{E_1}}{\prod_{k=2}^{n-1\ge 2}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)]}\left(1-\frac{t_n}{t_{n+1}}\right) \text{ для } t = t_{n+1}.$$

Об одном математическом способе прогнозирования и управления процессом производства

Проблему прогнозирования события и умение управления производством на последующем интервале времени (t_{N+1},t_{N+2}) с помощью функций влияния неучтенных параметров $\omega_m(t_{m+1},\lambda_m)$, встретившихся на всем предыдущем интервале времени (t_1,t_N), поступим следующим образом. Функции влияния неучтенных параметров $\omega_m(t,\lambda_m)$ есть интегральные характеристики воздействий внешних факторов, которые появились под воздействием событий происходящих в обществе, таких как социально экономических изменений; нравственно - политических воздействий и т. д. В связи с этим, на последующем интервале времени (t_{N+1},t_{N+2}) более вероятным может встретится любой из факторов или их комбинаций ранее встретившихся в предыдущем интервале времени (t_1,t_N). Поэтому изучая проблему прогнозирования любого экономического процесса на последующем интервале времени (t_{N+1},t_{N+2}), необходимо быть готовым к воздействию подобных факторов. В связи с этим, воздействуем на последующем интервале времени на поведение экономического процесса желаемой функций влияния неучтенных параметров, которая встретилась нам на предыдущем общем интервале времени (t_1,t_N). Для этого случая построим математический вид целевой функций $y_{N+1}(t,\lambda_{N+1})$ в зависимости от 1-ой кусочно-линейной прямой $y_1 = y_1(t)$ и желаемой функцией влияния $\omega_m(t,\lambda_m)$, которая встретилась нам на предыдущем общем интервале времени (t_1, t_N). Необходимым условием воздействия функцией влияния неучтенного параметра $\omega_m(t, \lambda_m)$ на интервале времени (t_{N+1}, t_{N+2}) будет:

$$\omega_{N+1}(t, \lambda_{N+1}) = \omega_m(\xi, \lambda_m) \tag{10}$$

или

$$\lambda_{N+1}\left(1 - \frac{t_{N+1}}{t}\right) = \lambda_m\left(1 - \frac{\xi_m}{\xi}\right). \tag{11}$$

Здесь переменная ξ меняется в интервале времени $\xi_m \le \xi \le \xi_{m+1}$, соответствующая времени воздействия функции влияния $\omega_m(t, \lambda_m)$. В силу того, что воздействие планируется на интервале времени (t_{N+1}, t_{N+2}), начиная с точки t_{N+1}, а также, учитывая тот факт, что в (11) левая часть зависит только от t, а правая часть - только от ξ при условии $\omega_{N+1}(t, \lambda_{N+1}) = 0$ при $t = t_{N+1}$, необходимым условием равенства (11) будет соблюдено при $t = \xi, t_{N+1} = \xi_m, \lambda_{N+1} = \lambda_m, \lambda_{N+1} = \lambda_m$. Тогда в (7)-(9) заменив $n = N$ на $(N+1)$ получим:

$$y_{N+1}(t, \lambda_{N+1}) = E_1 t[1 - \omega_m(t, \lambda_m)] \prod_{k=2}^{N \ge 2} [1 - \omega_k(t_{k+1}, \lambda_k)] + y_1(t_1) - E_1 t_1 \tag{12}$$

$$\lambda_m = \frac{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1 \ge 2} [1 - \omega_\alpha(t_{\alpha+1}, \lambda_\alpha)] - \dfrac{E_m}{E_1}}{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1 \ge 2} [1 - \omega_\alpha(t_{\alpha+1}, \lambda_\alpha)]} \tag{13}$$

$$\omega_m(t, \lambda_m) = \lambda_m\left(1 - \frac{t_{N+1}}{t}\right) = \frac{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1 \ge 2} [1 - \omega_\alpha(t_{\alpha+1}, \lambda_\alpha)] - \dfrac{E_m}{E_1}}{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1 \ge 2} [1 - \omega_\alpha(t_{\alpha+1}, \lambda_\alpha)]}\left(1 - \frac{t_{N+1}}{t}\right) \tag{14}$$

Случай $\omega_m(t, \lambda_m) = 0$ при $t = t_{N+1}$, соответствует случаю, когда внешнее воздействия (внешние неучтенные факторы) на интервале времени (t_{N+1}, t_{N+2}) таковы как на предыдущем интервале времени (t_N, t_{N+1}). В этом случае достаточно продолжить аппроксимационную прямую $y = y_N(t, \lambda_N)$ до пересечения с прямой $t_{N+2} = 0$. Значение функции $y_{N+1}(t_{N+2}, \lambda_N)$ в точек их пересечения будет одной из значений прогнозной величины. В этом случае управляющий параметр равен нулю, т.е. $\omega_m(t, \lambda_m) = 0$. При любом другом t взятом в интервале $t_{N+1} \le t \le t_{N+2}$ соответствующее значение функции $\omega_{N+1}(t, \lambda_{N+1})$ будет отличатся от случая $\omega_m(t, \lambda_m) = 0$. Максимальное значение функции влияния неучтенных параметров будет соответствовать при $t = t_{m+1}$, т.е. $\omega_m(t_{m+1}, \lambda_m)$. Выбирая по желанию функцию $\omega_m = \omega_m(t, \lambda_m)$, возникающие на всем интервале времени (t_1, t_N) и воздействуя им с точки t_{N+1} до точки t_{N+2}, функция $y_{N+1} = y_{N+1}(t, \lambda_{N+1})$ станет числовым значением прогнозирования события на будущем шаге t_{N+2}. Учитывая тот факт, что мы по желанию можем выбирать функции $\omega_m = \omega_m(t, \lambda_m)$, то эта функция и будет представлять собою в качестве функции управления неучтенных параметров, а ее соответствующая функция $y_{N+1}(t, \lambda_{N+1})$ будет управляющей целевой функцией процесса производства.

Следует отметить тот факт, что говоря о функции $\omega_m(t,\lambda_m)$ следует понимать предварительно вычисленные их значения на предыдущих этапах. Поэтому в формуле (12) используется готовое числовое значение $\omega_m(t,\lambda_m)$, вычисленное при построении предыдущих кусочно-линейных функций. Таким образом, с помощью воздействия функциями влияния неучтенных параметров в виде $\omega_m(t,\lambda_m)$ или воздействием их комбинацией, с конца кусочно-линейной функции $y_N(t,\lambda_N)$ точки $[t_{N+1}; y_N(t_{N+1},\lambda_N)]$ будут исходить веером кусочно-линейные функции (рис.2). Пересечение же этой серии функций с прямой $t_{N+2}=0$ будут давать ряд значений функций $y_{N+1,1}(t_{N+2},\lambda_{N+1})$, $y_{N+1,2}(t_{N+2},\lambda_{N+1}),\ldots$ $y_{N+1,m}(t_{N+2},\lambda_{N+1})$. Эта же серия значений целевой функции создадут область ее изменения, в которой будут минимум и максимум его значения $[y_{N+1}(t_{N+1},\lambda_{N+1})|_{\min},\ y_{N+2}(t_{N+2},\lambda_{N+1})|_{\max}]$. Эта область изменения функции $y_{N+1}(t,\lambda_m)$ и будет служить область управления процессом производства (рис.2).

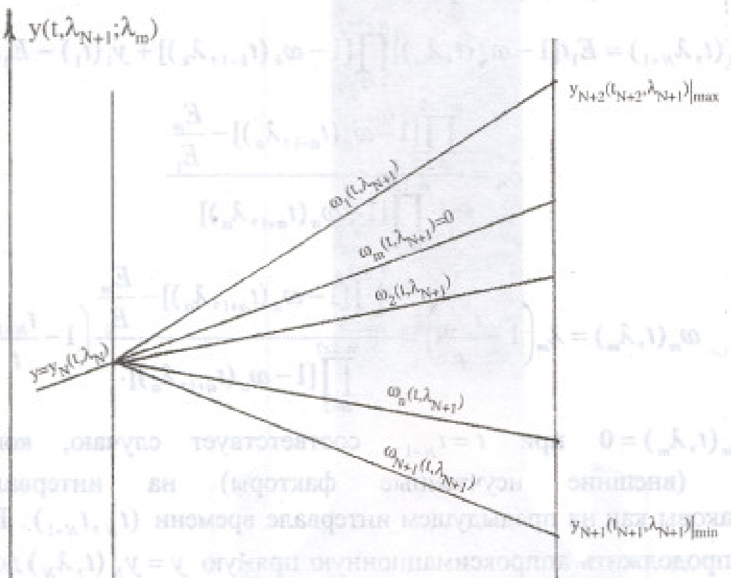

Рис.2

Рассмотрим модельную кривую события выпуклость кверху, часто встречающееся в экономических задачах:

Пример. Пусть дана таблица данных $\{t_i, y_i(t_i)\}$, описывающая некоторый экономический процесс (Табл.1) Известными приближенными методами [1-3], в частности, способом наименьших квадратов, представим эту таблицу в виде пяти кусочно-линейных функций (рис. 3). Из рисунка видно, что аппроксимированная кривая представляет из себя в виде кусочно-линейных прямых выпуклость кверху.

Основной задачей исследования является, по знанию характеристик предыдущих пяти кусочно-линейных функций, заданных на общем интервале времени $(t_1.t_6)$, построить шестую кусочно-линейную функцию на последующем интервале времени $(t_6.t_7)$; во-вторых, по характеристиками шестой кусочно-линейной функции дать прогнозные рекомендации экономического события и указать способ управления экономическим процессом.

Для этого применением формулу целевой функции (12)-(14) к исследуемой задаче. Они примут вид:

$$y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)=E_1 t\left[1-\lambda_m\left(1-\frac{t_6}{t}\right)\right]\prod_{k=2}^{5}[1-\omega_k(t_{k+1},\lambda_k)]+y_1(t_1)-E_1 t_1 \tag{15}$$

$$\lambda_m=\frac{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1\geq 2}[1-\omega_\alpha(t_{\alpha+1},\lambda_\alpha)]-\dfrac{E_m}{E_1}}{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1\geq 2}[1-\omega_\alpha(t_{\alpha+1},\lambda_\alpha)]} \tag{16}$$

$$\omega_m(t,\lambda_m)=\lambda_m\left(1-\frac{t_{N+1}}{t}\right)=\frac{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1\geq 2}[1-\omega_\alpha(t_{\alpha+1},\lambda_\alpha)]-\dfrac{E_m}{E_1}}{\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1\geq 2}[1-\omega_\alpha(t_{\alpha+1},\lambda_\alpha)]}\left(1-\frac{t_{N+1}}{t}\right) \tag{17}$$

Таким образом, функция $y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$ зависит от времени t и произвольно выбранного параметра λ_m.Причем параметр λ_m есть числовые значения экономического события, полученные на всем предыдущем интервале времени $(t_1.t_6)$. Каждому числовому значению параметра λ_m^* будет соответствовать своя целевая функция экономического события $y_6=y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$. Все эти функции будут исходить из одной точки $y_6(t_6,\lambda_6)$ в виде веера. Пересечение же функций $y_6=y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$ с прямой $t_7=0$ для каждого значения λ_m^* будут определять как область изменения управляющей целевой функции $y_6=y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$, и позволяет численно предсказать (прогнозировать) поведение процесса производства в следующем интервале времени $t_7\leq t\leq t_8$.

Зададим значения $E_1=4, t_1=1, y_1(t_1)=2, t_6=21$ и проводя соответствующее вычисление (Таб. 1, рис.3) уравнение шестой кусочно-линейной прямой в кривой выпуклостью кверху примет вид:

$$y_6(t,\lambda_m)=1{,}4286\left[1-\lambda_m\left(1-\frac{21}{t}\right)\right]t-2 \tag{18}$$

По формуле (18) проведен числовой расчет при $t_7=24$ для всех значений параметра влияния неучтенных факторов λ_m: $\lambda_2=0{,}5$; $\lambda_3=0{,}58$; $\lambda_4=0{,}7682$; $\lambda_5=0{,}7932$ (Табл. 1, 1а; рис. 3,4).

Таблица 1.

n	t_n	$y_n(t_n)$	$E_n=\frac{y_{n+1}-y_n}{t_{n+1}-t_n}$	λ_n	$\omega_n(t,\lambda_n)$	$\omega_n(t_{n+1},\lambda_n)$	$y_n(t,\lambda_n)$
1	1	2	4	0	0		$y_1(t)=4t-2$
2	3	10	2	0,5	$0{,}5\left(1-\frac{3}{t}\right)$	0,2857	$y_2(t,\lambda_2)=2t+4$
3	7	18	1,2	0,58	$0{,}58\left(1-\frac{7}{t}\right)$	0,2417	$y_3(t,\lambda_3)=1{,}2t+9{,}6$
4	12	24	0,5	0,7692	$0{,}7692\left(1-\frac{12}{t}\right)$	0,2564	$y_4(t,\lambda_4)=0{,}5t+17{,}9967$
5	18	27	0,3333	0,7932	$0{,}7932\left(1-\frac{18}{t}\right)$	0,1133	$y_5(t,\lambda_5)=0{,}3332t+21$
6	21	28					

Таблица 1а.

При $y_6(t,\lambda_m) = 1{,}4286\left[1 - \lambda_m\left(1 - \dfrac{21}{t}\right)\right]t - 2 \quad y_6(t=21;\lambda_6;\lambda_m=0) = 28; \quad y_5(t=24;\lambda_5;\lambda_m=0) = 29$

m	λ_m	$y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$	$y_6(t=24;\lambda_6;\lambda_m)$
2	0,5	$y_6(t,\lambda_6;\lambda_2) = 0{,}7143t + 13$	30,1482
3	0,58	$y_6(t,\lambda_6;\lambda_3) = 0{,}6t + 15{,}4$	29,8
4	0,7692	$y_6(t,\lambda_6;\lambda_4) = 0{,}3297t + 21{,}076$	28,62
5	0,7932	$y_6(t,\lambda_6;\lambda_5) = 0{,}2954t + 21{,}7964$	28,9888

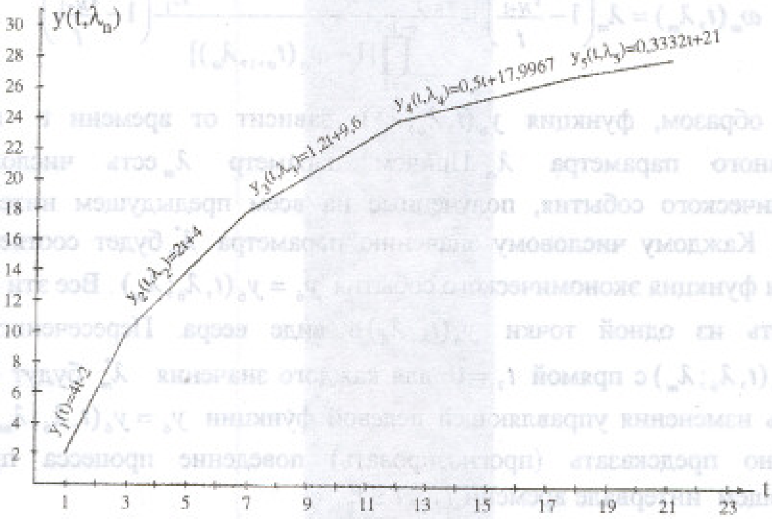

Рис. 3

Результатом числового расчета установлено:

-Согласно предложенной динамической модели построена кусочно-линейная непрерывная функция $y_n(t,\lambda_n)$ выпуклость кверху в интервале времени $1 \le t \le 21$ в зависимости от вида 1-ой кусочно-линейной функции $y_1 = y_1(t)$ и всех функций влияния неучтенных параметров $\omega_n(t,\lambda_n)$ (Табл.1, рис.3),

Численно установлена область возможного изменения целевой функции события $y = y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$ на интервале времени $21 \le t \le 24$ взависимости от параметра управления λ_m (Табл. 1а; рис.4):

$$28{,}2 \le y_6(t=24;\lambda_6;\lambda_m) \le 30{,}1482 \qquad (19)$$

Установлено, что ожидаемая прогнозная величина функций $y = y_6(t,\lambda_6;\lambda_m)$ на интервале изменения времени $21 \le t \le 24$ исходят из точки $t = 21$ веером и определяются формулой (18).

-Численно установлена область изменения параметра управления λ_m в интервале изменения времени $1 \le t \le 24$:

$$0{,}5 \le \lambda_m \le 0{,}7932 \qquad (20)$$

и область изменения значений функций управления $\omega_n(t_{n+1},\lambda_n^{\cdot})$ событием производства:

$$0{,}1133 \le \omega_n(t_{n+1}, \lambda_n) \le 0{,}2857 \,. \tag{21}$$

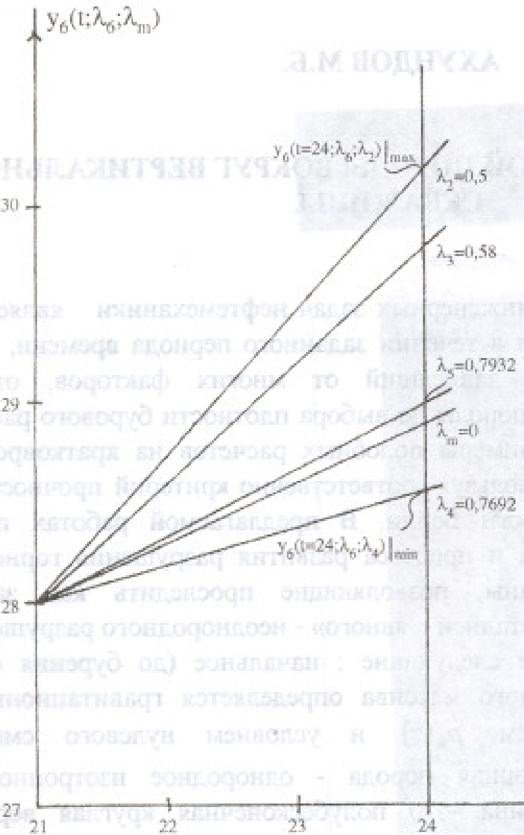

Рис. 4

Литература

[1]. Конторович А.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа* Изд. Физ-мат «Литертура» , Москва, 1962, 590 с.

[2]. Терехов А.С. *Экономико-математические методы* Изд «Статистика» Москва, 1972, общ. кол с. 359, Использ. с.261-284 .

[3]. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. *Линейное и выпуклое программирование* Изд. «Наука» Москва, 1964, общ. кол. 347 с. Использ с.27-68; 123-127; 242-255.

[4]. Воронин В.Г. Математические методы планирования и управления на предприятиях пищевой прошлым лености Москва , !971, общ. кол. 320 с. Использ с. 31-61