

УДК 532.539, 532.593

БАЙКОВ В.А., СЕРЕДА И.А.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ НЕСУЩЕЙ ФАЗЫ И ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗА НА  
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА

Исследование различных аспектов колебаний одиночного сферического пузырька газа в воде при периодических внешних воздействиях было начато достаточно давно [1, 2, 3]. В работе [2] был найден гистерезис, а также наличие субрезонансов, обуславливающих сложную картину колебаний. В дальнейших работах было продолжено изучение вынужденных колебаний пузырька, в частности (см. например [4]), с помощью частотных бифуркационных диаграмм было показано, что существуют области частот внешнего воздействия, при которых колебания пузырька характеризуются, причем эти области существенно зависят от амплитуды внешнего воздействия и начального радиуса пузырька.

*Модель и метод исследования.* В качестве модели, описывающей поведение одиночного пузырька при периодическом внешнем воздействии с учетом сжимаемости жидкости и излучения была использована модель Келлера-Миксиса [5] в виде:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{\tilde{P} - P_{stat} + P_v - P_s \sin[2\pi\nu(t + R/c)]}{\rho} + \frac{R}{\rho c} \frac{d\tilde{P}}{dt},$$

$$\tilde{P} = \left(P_{stat} - P_v + \frac{2\sigma}{R_n}\right) \left(\frac{R_n}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R}. \quad (1)$$

Здесь  $R$  - радиус пузырька;

$R_n$  - радиус пузырька в состоянии равновесия (при  $P_s = 0$ );

$P_{stat}, P_v$  - начальное (статическое) давление и давление пара соответственно;

$P_s$  - амплитуда возмущающего давления;

$\sigma, \mu, \rho$  - коэффициент поверхностного натяжения, вязкость и плотность жидкости;

$c$  - скорость звука в жидкости;

$\gamma$  - показатель адиабаты.

В работе [2] частотные бифуркационные диаграммы строились следующим образом. Уравнение (1) сводилось к автономной системе из 3-х уравнений первого порядка, для которой строилось сечение Пуанкаре (являющееся фазовой плоскостью для уравнения (1), т.е. проекция решения автономной системы на сечение Пуанкаре соответствует фазовым траекториям уравнения (1)). Для определенных параметров среды (а именно  $\mu = 10^{-3}$  Па·с,  $\sigma = 0.075$  Н/м,  $\gamma = 4/3$ ,  $c = 1500$  м/с) начиная с некоторой низкой частоты  $\nu_1$  (например 30 кГц) автономная система решалась до тех пор, пока решение не пересекало фазовую плоскость 100 раз, после чего частота увеличивалась на некоторое небольшое значение  $\Delta\nu$  (т.е. начальным условием на каждом последующем шаге по  $\nu$

является последнее полученное на предыдущем шаге значение  $(R, \dot{R})$  и так до тех пор, пока частота не достигала некоторого определенного значения  $\nu_2$ . При этом все точки пересечения карты Пуанкаре с фазовой плоскостью фиксировались на бифуркационной диаграмме, что позволяло отследить периодичность решения автономной системы на данной частоте. После чего, для учета явления гистерезиса описанная процедура повторялась в обратном направлении, т.е. с медленным уменьшением частоты внешнего воздействия с  $\nu_2$  до  $\nu_1$ .

С другой стороны, бифуркационные диаграммы можно строить и другим образом, а именно, фиксировать на ней локальные максимумы решения уравнения (10) (количество которых соответствует количеству петель на фазовой траектории) при медленном изменении частоты внешнего воздействия  $\nu$ . На рис. 2а) представлена бифуркационная диаграмма для случая с пузырьком воздуха радиуса  $10^{-5}$  м в воде при  $P_s = 90$  кПа в диапазоне частот внешнего воздействия 120-220 кГц. Приведенная диаграмма частично (в области от 180 до 220 кГц) совпадает с диаграммой, построенной с помощью карты Пуанкаре. В области несовпадения (от 120 до 180 кГц) количество петель на фазовой плоскости конечно, а это несовпадение можно объяснить тем, что, как отмечено в [4] для численного решения использовалась специальная замена переменных, не оставляющая инвариантным количество петель.

В настоящей работе используется несколько другой метод построения бифуркационных диаграмм. Для этого решается задача (1) с начальным условием  $R_{|t=0} = R_0 = R_n$ ,  $\dot{R}_{|t=0} = \dot{R}_0 = 0$  при фиксированной внешней частоте воздействия  $\nu$  и параметрах среды. При этом, начиная с момента времени  $t = 100/\nu$  на бифуркационной диаграмме фиксировались все локальные максимумы решения  $R(t)$ . Задача решалась для различных значений  $\nu = 120, 121, 122, \dots, 220$  кГц. Такая бифуркационная диаграмма для пузырька воздуха радиуса  $10^{-5}$  м в воде при  $P_s = 90$  кПа представлена на рис.1б). В области частот от 120 до 165 кГц бифуркационные диаграммы, представленные на рис.1а) и 1б) не совпадают, а именно, фазовые портреты соответствующих решений имеют разное, но конечное количество петель. Это обусловлено тем, что количество петель на фазовой плоскости зависит от начальных данных. Для иллюстрации этого факта решалась задача (1) для различных значений  $\dot{R}_0: \dot{R}_0 = -20, -19, \dots, 20$  м/с. В частности, при частоте внешнего воздействия  $\nu = 161$  кГц показано, что решение с числом петель на фазовой плоскости 4 существует в диапазонах  $\dot{R}_0$  от -18 до -9 и от 5 до 13 м/с (см. рис. 2а)), а при других значениях совпадает с решением при  $\dot{R}_0 = 0$  (см. рис. 2б)). В области совпадения бифуркационных диаграмм, представленных на рис. 1 зависимость решения от начальных данных не получена.

*Зависимость бифуркационных диаграмм от свойств среды.* Целью данной работы является исследование влияния вязкости жидкости, коэффициента поверхностного натяжения, показателя адиабаты и скорости звука в жидкости на характер вынужденных колебаний пузырька. Для этого численно решалась задача (1) с начальными данными  $R_0 = R_n$ ,  $\dot{R}_0 = 0$  для следующих значений параметров:

$$\mu = 0 - 10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{с},$$

$$\sigma = 0.00725 - 0.725 \text{ Н/м},$$

$$\gamma = 7/6 - 10/6,$$

$$c = 750 - 150000 \text{ м/с.}$$

При этом при варьировании одного из параметров, все остальные оставались постоянными и брались равными  $\mu = \mu_0 = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $\sigma = \sigma_0 = 0.0725 \text{ Н/м}$ ,  $\gamma = \gamma_0 = 4/3$ ,  $c = c_0 = 1500 \text{ м/с}$ , что соответствует случаю пузырька воздуха в воде. Расчеты проводились при постоянных значениях  $P_{\text{стат}} = 100 \text{ кПа}$ ,  $P_v = 2.33 \text{ кПа}$ . Каждый из расчетов производился для диапазона частот  $\nu = 120 - 220 \text{ кГц}$ .

1. *Вязкость.* Рассмотрим влияние изменения вязкости жидкости на колебания одиночного пузырька. При этом  $\mu$  бралось от 0 до  $10^{-1} \text{ Па}\cdot\text{с}$ . На рис. 2а), б), в) и г) приведены бифуркационные диаграммы для пузырька газа в жидкости с вязкостью  $\mu = \mu_0 * 0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\mu = \mu_0 * 10$  и  $\mu = \mu_0 * 100$  соответственно. Из рисунка 2а) видно, что уменьшение вязкости жидкости с  $\mu_0$  до 0 приводит лишь к незначительному изменению амплитуды решения. Качественного изменения бифуркационной картины при этом не происходит. Увеличение же вязкости по отношению к вязкости воды приводит к качественному изменению картины, а именно к исчезновению областей стохастичности в диапазоне 185-195 кГц. При  $\mu = 10\mu_0$  в пузырьковом осцилляторе имеет место двух-периодическое, а при  $\mu = 100\mu_0$  - одно- периодическое решение соответствующее внешней частоте.

2. *Коэффициент поверхностного натяжения.* Расчеты производились для значений  $\sigma$  в диапазоне от  $\sigma = \sigma_0 / 4$  до  $\sigma = \sigma_0 * 10$ . На рис 3а), б), в) и г) приведены результаты расчетов для  $\sigma = \sigma_0 / 4$ ,  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\sigma = \sigma_0 * 4$  и  $\sigma = \sigma_0 * 10$  соответственно. Уменьшение  $\sigma$  в 4 раза по отношению к  $\sigma_0$  приводит, во-первых, к сдвигу бифуркационной диаграммы влево. Это связано с тем, что собственная частота линейных колебаний, описываемых уравнением (1) (частота Минаэрта) линейно зависит от коэффициента поверхностного натяжения. Во-вторых, область стохастичности распадается на 2 диапазона частот - 172-178 кГц и 187-190 кГц.

При увеличении  $\sigma$  диаграмма сдвигается вправо, области стохастичности при этом исчезают, а количество петель на фазовой плоскости уменьшается. Например, бифуркация, проявляющаяся на частоте ок. 140 кГц при  $\sigma = \sigma_0 * 4$  (рис.3в)), при увеличении  $\sigma$  до  $\sigma_0 * 10$  не наблюдается (рис. 3г)).

3. *Показатель адиабаты.* Расчеты производились для значений  $\gamma$  в диапазоне от 7/6 до 10/6. На рис. 4 представлены бифуркационные диаграммы для  $\gamma = 7/6$ ,  $\gamma = 8/6$  и  $\gamma = 10/6$  (рис. 4 а), б) и в) соответственно). Как видно из данных рисунков, показатель адиабаты существенно влияет на расположение точек бифуркации на диаграммах, а именно, с увеличением  $\gamma$  бифуркационная диаграмма смещается вправо. А именно, при  $\gamma = 7/6$  область стохастичности расположена в диапазоне 172-180 кГц, тогда как при  $\gamma = 8/6$  - в диапазоне 185-195 кГц, а при  $\gamma = 10/6$  - 225-215 кГц. Это связано с тем, что собственная частота уравнения (1) увеличивается с ростом  $\gamma$ . Кроме того, при  $\gamma = 10/6$  на бифуркационной диаграмме возникает новая область стохастичности- 125-133 кГц (рис. 4в)), а также на частоте 183 кГц.

4. *Скорость звука в жидкости.* Расчеты производились для различных значений скорости звука: от  $c = 750 \text{ м/с}$  до  $c = 150000 \text{ м/с}$ . Отметим, что собственная частота линейных колебаний в указанном диапазоне слабо зависит от

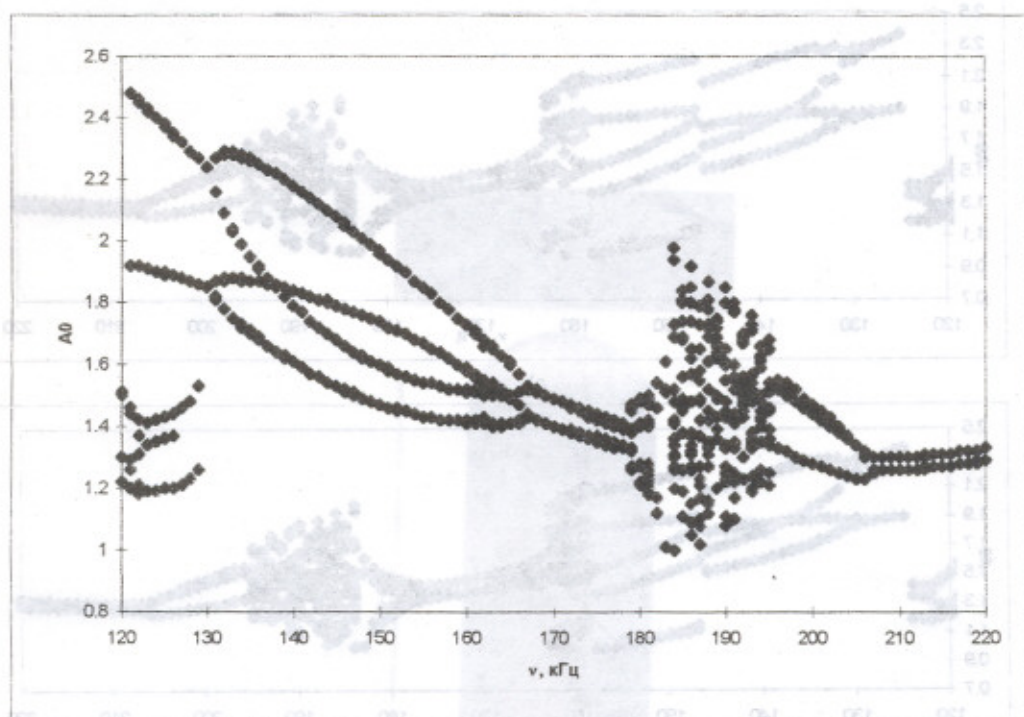
$c$ . На рис. 5 представлены бифуркационные диаграммы для  $c = c_0 / 2$ ,  $c = c_0$ ,  $c = c_0 * 2$  и  $c = c_0 * 100$  (рис. 5а), б), в) и г) соответственно). Последний случай соответствует практически несжимаемой жидкости, т.е. излучение пузырька во внешнюю среду очень мало. Как видно из рис. 5, уменьшение  $c$  в 2 раза по отношению к скорости звука в воде приводит к тому, что области стохастичности исчезают и в пузырьковом осцилляторе возбуждаются не более чем 3-х периодические колебания (рис. 6а)). Однако, увеличение  $c$  в 2 раза по отношению к скорости звука в воде приводит к тому, что область стохастических колебаний, существующая в диапазоне 185-195 кГц при  $c = c_0$  существенно трансформируется (рис. 5в)), а при дальнейшем увеличении  $c$  - исчезает полностью (рис.5 г)). Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что количество гармоник (количество петель на фазовой плоскости), возбуждаемых в пузырьковом осцилляторе, а также наличие областей стохастичности немонотонно зависит от скорости звука в жидкости.

Авторы выражают признательность И.Ш. Ахатову за плодотворные дискуссии.

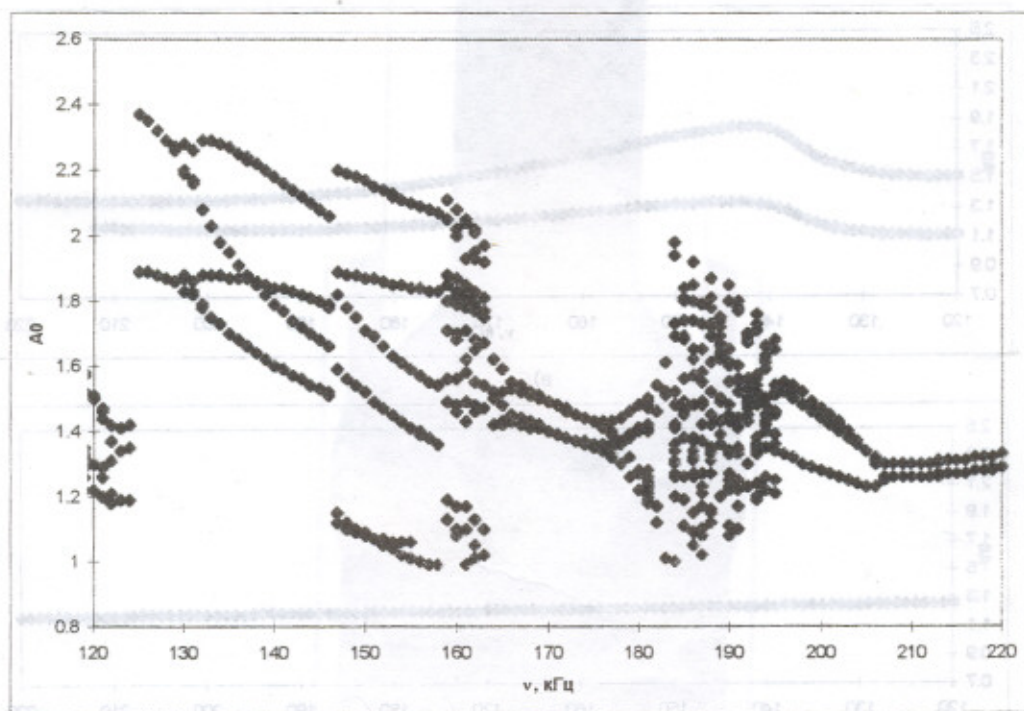
#### Список обозначений

- $t$  - время,
- $R$  - радиус пузырька,
- $R_0$  - радиус пузырька при  $t = 0$ ,
- $\dot{R}$  - радиальная скорость движения стенки пузырька,
- $\dot{R}_0$  - радиальная скорость движения стенки пузырька при  $t = 0$ ,
- $R_n$  - радиус пузырька в состоянии равновесия (при  $P_s = 0$ ),
- $P_{шт}$  - начальное (статическое) давление,
- $P_v$  - давление пара,
- $P_s$  - амплитуда возмущающего давления,
- $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения,
- $\mu$  - вязкость жидкости,
- $\rho$  - плотность жидкости,
- $c$  - скорость звука в жидкости,
- $\gamma$  - показатель адиабаты,
- $\nu$  - частота внешнего воздействия,
- $\nu_1$  - начальная частота при построении бифуркационной диаграммы,
- $\nu_2$  - конечная частота при построении бифуркационной диаграммы,
- $\Delta\nu$  - шаг построения бифуркационной диаграммы,
- A0- локальный максимум решения, нормированный на начальный радиус пузырька.

Нулевой нижний индекс соответствует случаю пузырька воздуха в воде.

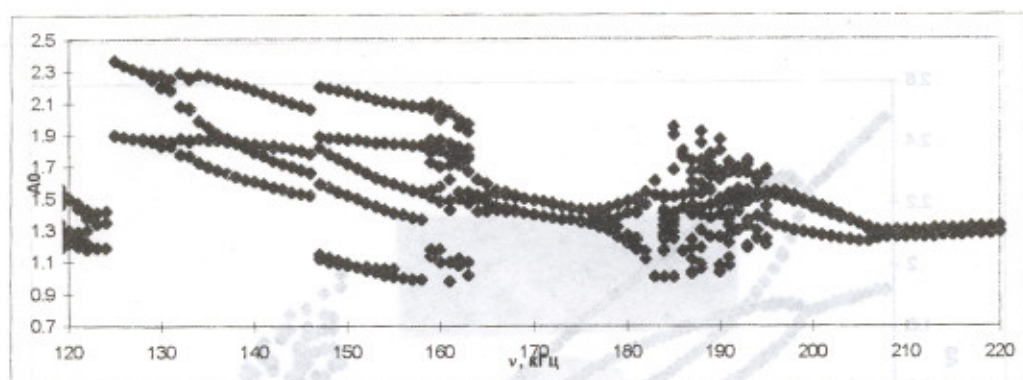


а)

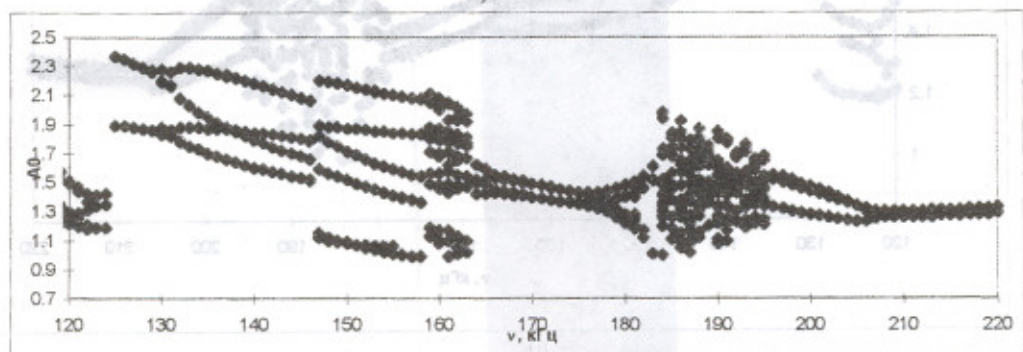


б)

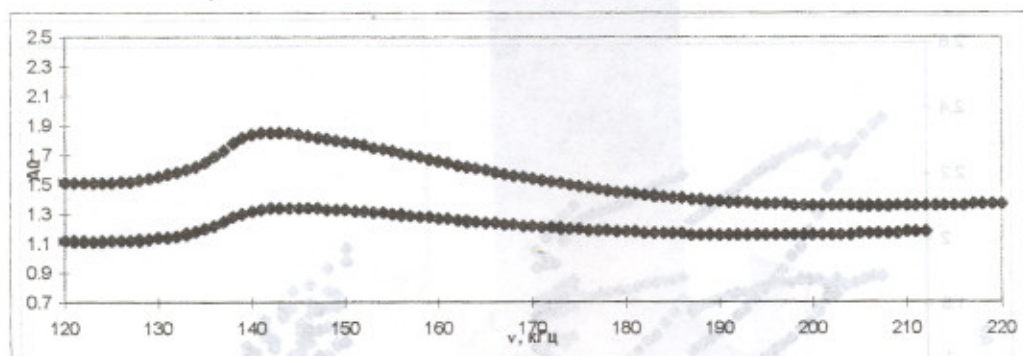
Рис. 1. Частотная бифуркационная диаграмма для пузырька воздуха в воде при  $P_j = 90$  кПа.



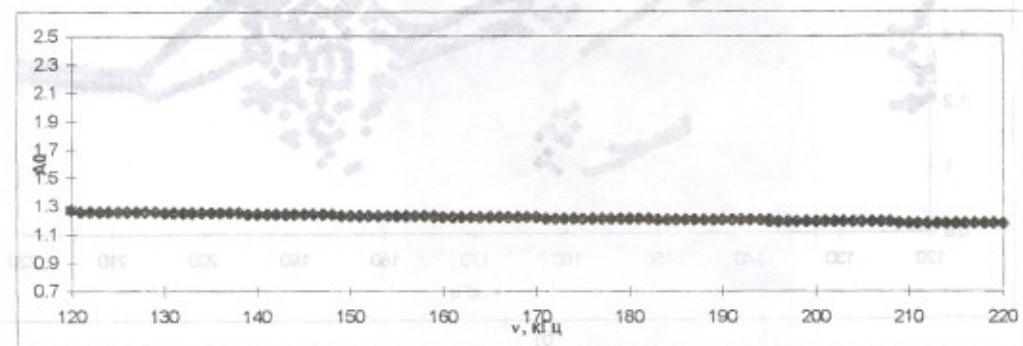
а)



б)

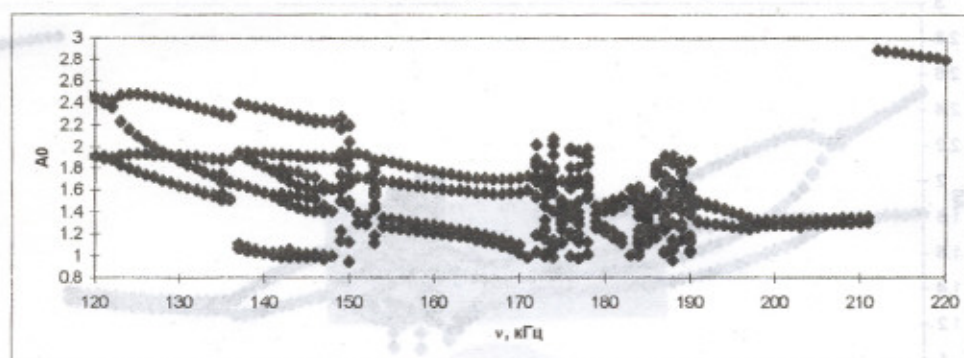


в)

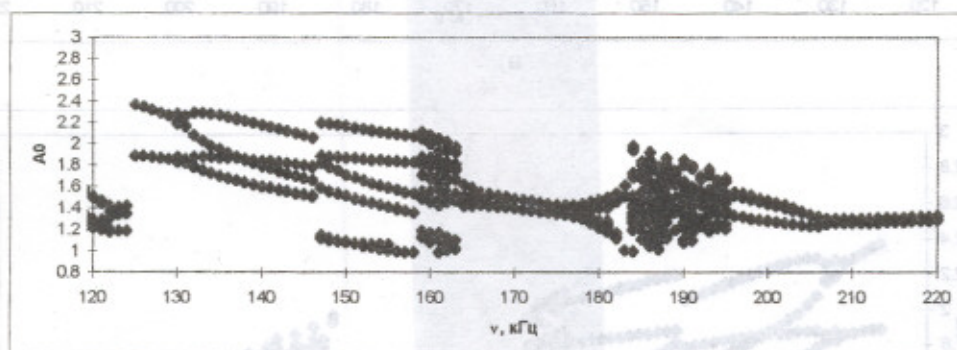


г)

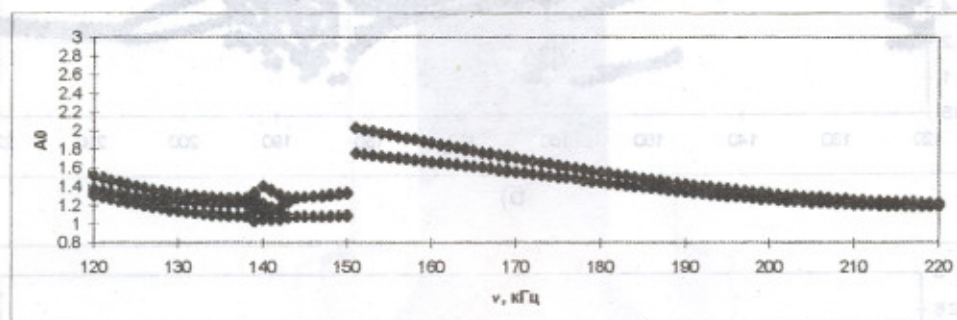
Рис. 2. Частотная бифуркационная диаграмма для различных значений вязкости жидкости: а)  $\mu = 0$  Па·с, б)  $\mu = 0.001$  Па·с, в)  $\mu = 0.01$  Па·с, г)  $\mu = 0.1$  Па·с.



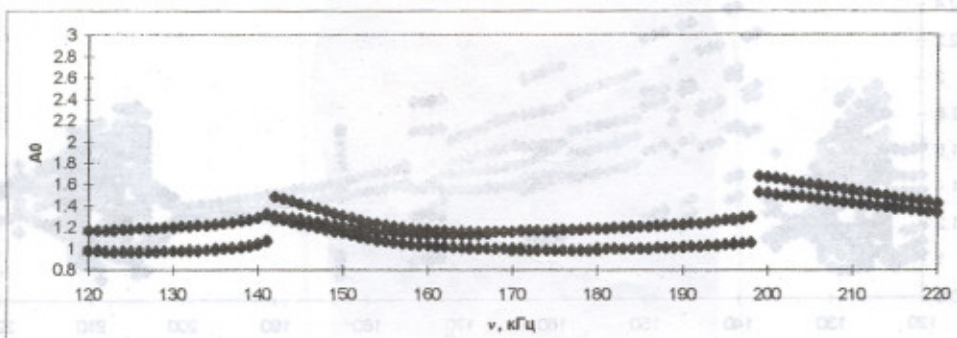
а)



б)

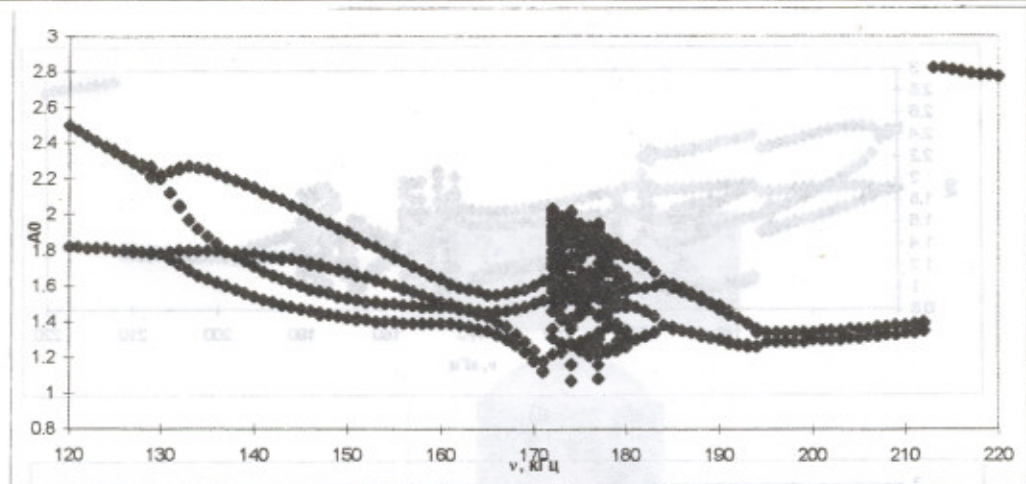


в)

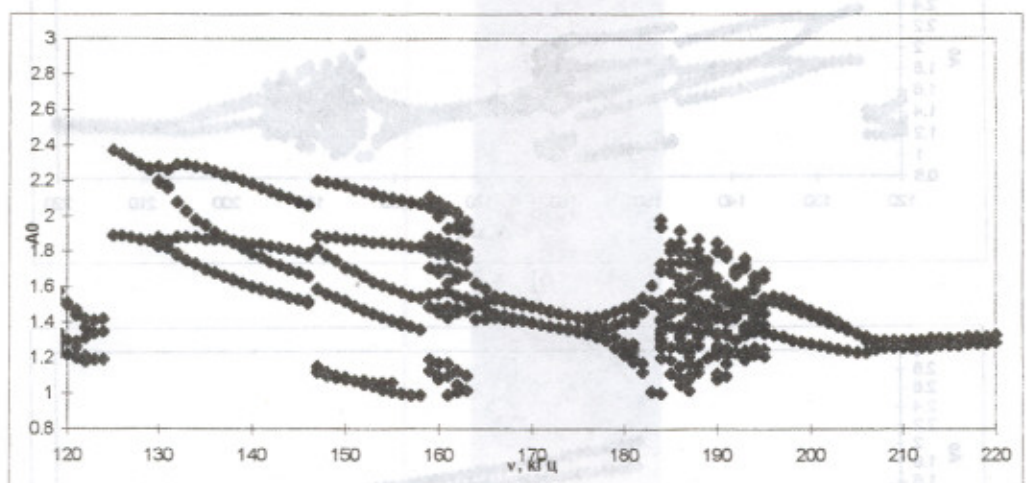


г)

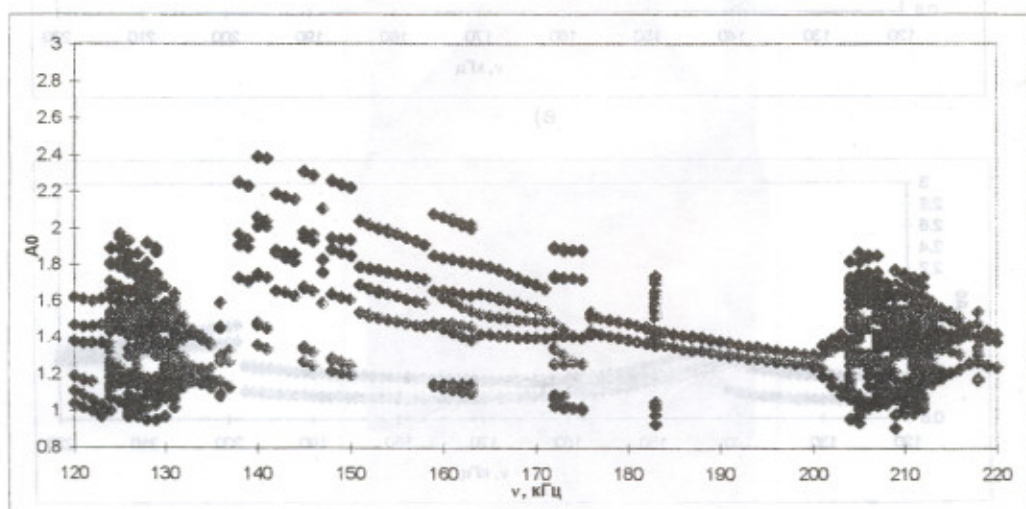
Рис.3. Частотная бифуркационная диаграмма для различных значений коэффициента поверхностного натяжения: а)  $\sigma = 0.018$  Н/м, б)  $\sigma = 0.0725$  Н/м, в)  $\sigma = 0.29$  Н/м, г)  $\sigma = 0.725$  Н/м.



а)



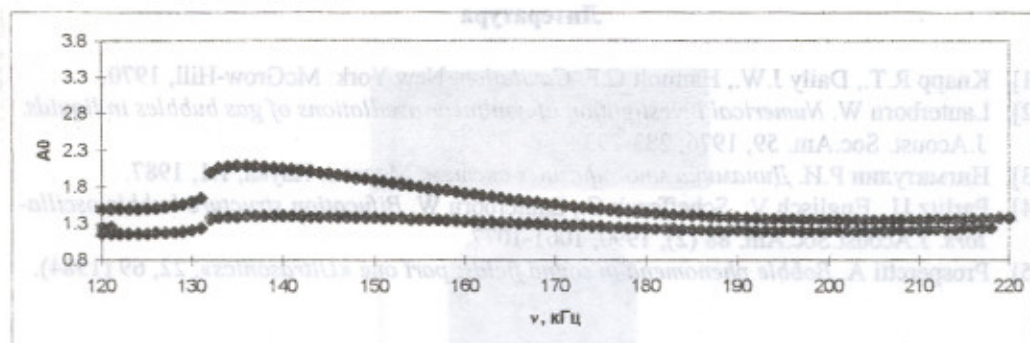
б)



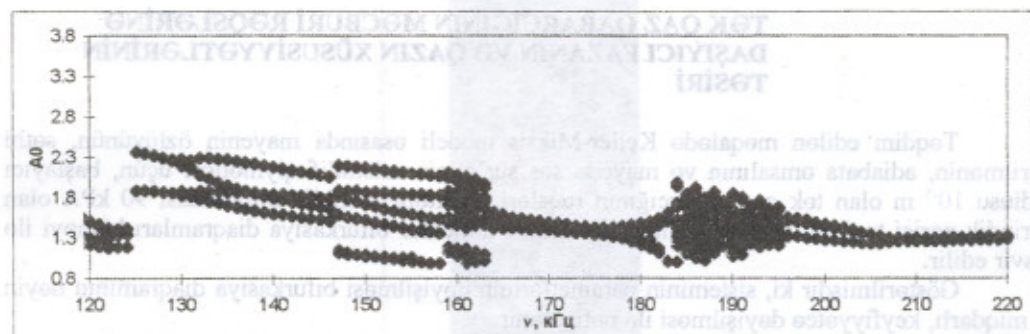
в)

Рис. 4. Частотная бифуркационная диаграмма для различных значений показателя адиабатности: а)  $\gamma = 7/6$ , б)  $\gamma = 8/6$ , в)  $\gamma = 10/6$ .

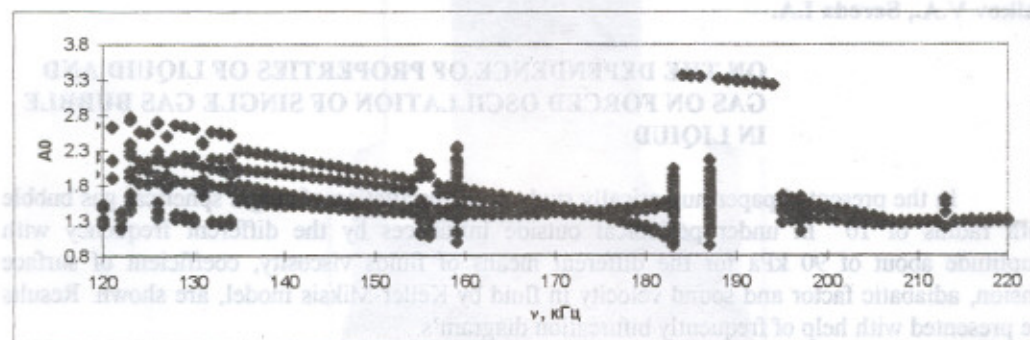




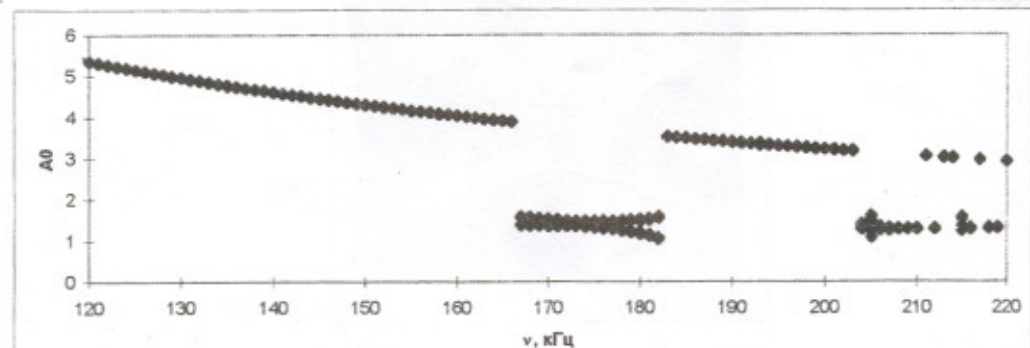
а)



б)



в)



г)

Рис. 5. Частотная бифуркационная диаграмма для различных значений скорости звука: а)  $c = 750$  м/с, б)  $c = 1500$  м/с, в)  $c = 3000$  м/с, г)  $c = 150000$  м/с.

## Литература

- [1]. Knapp R.T., Daily J.W., Hammit G.F. *Cavitation*. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [2]. Lauterborn W. *Numerical investigation of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids*. J.Acoust. Soc.Am. 59, 1976, 283-293.
- [3]. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных систем*. Москва: Наука, т.1, 1987.
- [4]. Parlitz U., Englisch V., Scheffczuk C., Lauterborn W. *Bifurcation structure bubble oscillators*. J.Acoust.Soc.Am 88 (2) 1000-1061, 1977.