1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 539.3

БАХЫШЕВ Ш.М.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА МЕЖДУ СЛОЕМ И ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Известно [2], что при оптимизации процессов управления термонапряженным состоянием тела, важнейшую роль играет определение интенсивности теплового источника, как одна из основных причин неравномерного распределения температуры. В связи с этим рассмотрим обратную задачу термоупругости об определении интенсивности теплового источника по дополнительной информации о температуре в слое или полупространстве.

1. Пусть упругое полупространство $x>0$ для которого плоскость $x=0$ является общей границей со слоем толщиной h. Предположим, что плоскость $x=-h$ теплоизолирована и свободна от внешних сил. Напряженно-деформированное состояние в полосе и полупространстве создается вследствие действия теплового источника интенсивностью $W(t)$ расположенного в плоскости $x=0$.

Требуется определить функции $W(t)$, $T_k(x,t)$, $\sigma_{kx}(x,t)$, $k=1,2$ из следующих условий:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}-\frac{1}{a_k}\frac{\partial T_k}{\partial t}=0;\\
&\frac{\partial^2 \sigma_{kx}}{\partial x^2}-\frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2 \sigma_{kx}}{\partial t^2}=\frac{1+\nu_k}{1-\nu_k}\rho_k a_k\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2}\quad k=1,2;\\
&T_k=T_0,\quad \sigma_{kx}=\frac{\partial \sigma_{kx}}{\partial t}=0,\quad t=0;\\
&\frac{\partial T_1}{\partial x}=0,\quad \sigma_{1x}=0,\quad x=-h;\\
&T_1=T_2,\quad \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}=W(t),\quad x=0;\\
&u_{1x}=u_{2x},\quad \sigma_{1x}=\sigma_{2x},\quad x=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Кроме того зададим одно из следующих четырех дополнительных условий:

$$T_k(x_k,t)=\varphi_{0k}(t),\quad \sigma_{kx}(x,t)=\psi_k(t),\quad k=1,2,\tag{2}$$

где $x_1\in(-h,0), x_2\in(0,\infty)$. Здесь $\varphi_{0k}(t)$, $\psi_k(t)$, $k=1,2$ - заданные функции имеющие преобразование Лапласа при $t\geq 0$.

Деформации ε_{kx} и напряжения σ_{ky}, σ_{kz} при известных σ_{kx} определяются формулами [3]:

$$\varepsilon_{kx}=\frac{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}{(1-\nu_k)E_k}\sigma_{kx}+\frac{1+\nu_k}{1-\nu_k}\alpha_k(T_k-T_0),$$

$$\sigma_{ky}=\sigma_{kz}=\frac{\nu_k}{1-\nu_k}\sigma_{kx}-\frac{1}{1-\nu_k}\alpha_k\left(T_k-T_0\right).$$

Здесь a_k, λ_k, α_k - коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и линейного теплового расширения соответственно, ν_k - коэффициент Пуассона, E_k - модуль упругости, c_k - скорость распространения волны расширения:

$$c_k^2=\frac{E_k(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)\rho_k},\quad k=1,2.$$

Введем безразмерные величины

$$\xi=\frac{c_1x}{a_1},\quad \tau=\frac{c_1^2t}{a_1},\quad \delta=\frac{c_1h}{a_1},\quad \theta_k=\alpha_k\left(T_k-T_0\right),\quad \sigma_k=\frac{1-2\nu_k}{E_k}\sigma_{kx},\quad k=1,2.$$

Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\theta_k}{\partial\xi^2}-\beta_k^2\frac{\partial\theta_k}{\partial\tau}=0;$$

$$\frac{\partial^2\sigma_k}{\partial\xi^2}-\gamma_k^2\frac{\partial^2\sigma_k}{\partial\tau^2}=\gamma_k^2\frac{\partial^2\theta_k}{\partial\tau^2},\quad k=1,2;$$

$$\theta_k=\sigma_k=\frac{\partial\sigma_k}{\partial\tau}=0,\quad \tau=0;$$

$$\sigma_1=m\sigma_2,\quad u_1=\nu u_2,\quad \xi=0;$$

$$\sigma_1=\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}=0,\quad \xi=-\delta;$$

$$\theta_1=\alpha\theta_2,\quad \frac{1}{B}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{1}{B_2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=W(\tau),\quad \xi=0;$$

$$\beta_1=1,\quad \beta_2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}},\quad m=\frac{E_1}{E_2}\frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_2},\quad \nu=\frac{(1+\nu_2)(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-\nu_2)};$$

$$\gamma_1=1,\quad \gamma_2=\frac{c_1}{c_2},\quad B_1=\frac{a_1c_1}{\lambda_1},\quad B_2=\frac{a_2c_1}{\lambda_2},\quad \alpha=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Перемещение в направлении нормали к плоскости $\xi=0$ с точностью до произвольного постоянного слагаемого определяется формулой:

$$u_k=\frac{a_1(1+\nu_k)}{c_1(1-\nu_k)}\int\left(\sigma_k+\theta_k\right)d\xi.$$

Применяя преобразование Лапласа по τ, приходим к задаче об определении решения системы

$$\frac{d^2\overline{\theta}_k}{d\zeta^2}-\beta_k s\overline{\theta}_k=0$$

$$\frac{d^2\overline{\sigma}_{kx}}{d\zeta^2}-\gamma_k^2s^2\overline{\theta}_k=\gamma_k^2s^2\overline{\sigma}_k,\quad k=1,2 \tag{3}$$

при условиях:

$$\overline{\sigma}_1=\frac{d\overline{\theta}_1}{d\xi}=0,\quad \xi=0; \tag{4}$$

$$\overline{\theta}_1 = \alpha\overline{\theta}_2\,, \quad \overline{u}_1 = \nu\overline{u}_2\,, \quad \frac{1}{B}\frac{d\overline{\theta}_1}{d\xi} - \frac{1}{B_2}\frac{d\overline{\theta}_2}{d\xi} = \overline{W}\,, \quad \xi = 0\,. \tag{5}$$

Решение системы (3) удовлетворяющее соответствующим граничным условиям (4) будет:

$$\overline{\theta}_1(\xi) = \frac{B_1\overline{W}}{\Delta}ch(\delta+\xi)\sqrt{s}\,, \quad -\delta \le \xi \le 0\,; \tag{6}$$

$$\overline{\theta}_2(\xi) = \frac{\lambda_2 B_2\overline{W}}{\lambda_1\Delta}\exp\left(-\beta_2\xi\sqrt{s}\right)ch\delta\sqrt{s}\,, \quad \xi \ge 0\,;$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{s}}{\lambda_1\Delta}\left(\lambda_2\beta_2 ch\delta\sqrt{s} + \lambda_1 sh\delta\sqrt{s}\right);$$

$$\overline{\sigma}_1(\xi) = \frac{1}{P(-\delta)}\left\{P_1P(\xi)\overline{\theta}_1(-\delta) + \left[\nu P_1\overline{\theta}_1(0) - \nu mP_2\overline{\theta}_2(0) + m\gamma_2\frac{P_1}{s}\overline{\theta}_1^{\,1}(0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\nu m}{s\gamma_2}P_2\overline{\theta}_2^{\,1}(0)\right]sh(\delta+\xi)s\right\} - P_1\overline{\theta}_1(\xi)\,;$$

$$\overline{\sigma}_2(\xi) = \frac{\gamma_2 e^{-s_2\xi}}{P(-\delta)}\left\{P_1\overline{\theta}_1(-\delta) + \frac{1}{s}\left[P_1\overline{\theta}_1^{\,1}(0) - \frac{\nu P}{\gamma_2^2}\overline{\theta}_2^{\,1}(0)\right]shs\delta + \left[mP_2\overline{\theta}_2(0) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - P_1\overline{\theta}_1(0)\right]ch\delta s\right\} - P_2\overline{\theta}_2(\xi)\,;$$

$$P(\xi) = m\gamma_2 ch\xi s - \nu shs\xi\,.$$

Введя обозначение

$$\varphi_k(\tau) = \alpha_k\left[\varphi_{0k}\left(\frac{a_1\tau}{c_1^2}\right) - T_0\right]$$

перепишем первое условие из (2) в виде:

$$\theta_k(\xi_k, \tau) = \varphi_k(\tau), \quad k = 1 \ \text{или} \ 2.$$

В преобразованиях Лапласа это условие будет иметь вид:

$$\overline{\theta}_k(\xi) = \overline{\varphi}_k(s) \quad k = 1 \ \text{или} \ 2\,, \tag{7}$$

где $\overline{\varphi}_k(s)$ - изображение функции $\varphi_k(\tau)$.

Предположим, что температура плоскости $x = x_1$ слоя изменяется по закону $\varphi_{0k}(t)$ и требуется определить интенсивности источника, температуры слоя и полупространства.

Подставляя значение $\overline{\theta}_1(\xi_1)$ из (6) в (7) при $k = 1$, получим:

$$\overline{W}(s) = \frac{\Delta\overline{\varphi}_1(s)}{B_1 ch(\delta+\xi_1)\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}\overline{\varphi}_1(s)}{\lambda_1 B_1}\frac{\lambda_2\beta_2 ch\delta\sqrt{s} + \lambda_1 sh\delta\sqrt{s}}{ch(\delta+\xi_1)\sqrt{s}}\,. \tag{8}$$

Пользуемся разложением:

$$\frac{1}{\lambda_2\beta_2 ch\delta\sqrt{s} + \lambda_1 sh\delta\sqrt{s}} = \frac{2}{\lambda_2\beta_2 + \lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi^n\exp\left[-(2n+1)\delta\sqrt{s}\right],$$

где

$$\chi = \frac{\lambda_2\beta_2 - \lambda_1}{\lambda_2\beta_2 + \lambda_1}.$$

Подставляя значение B_1 через термоупругих постоянных перепишем (8) в следующем виде:

$$\overline{W}(s)=\frac{\lambda_2\beta_2+\lambda_1}{a_1c_1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1\big)\sqrt{s}\Big]+$$
$$+\chi\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+2\delta+\xi_1\big)\sqrt{s}\Big]\Big\}\sqrt{s}\overline{\varphi}. \qquad (9)$$

Тогда изображения температурных функций будут иметь вид:

$$\overline{\theta}_1(\xi)=\frac{ch(\delta+\xi)\sqrt{s}}{ch(\delta+\xi_1)\sqrt{s}}\overline{\varphi}_1(s), \quad -\delta\le\xi\le 0;$$

$$\overline{\theta}_2(\xi)=\frac{ch\delta\sqrt{s}}{\alpha\, ch(\delta+\xi_1)\sqrt{s}}\exp\big(-\beta_2\xi\sqrt{s}\big)\overline{\varphi}_1(s), \quad \xi\ge 0. \qquad (10)$$

Пользуясь разложением в ряд

$$\frac{1}{ch(\delta+\xi_1)\sqrt{s}}=\frac{2\exp\big[-(\delta+\xi_1)\sqrt{s}\big]}{1+\exp\big[-(\delta+\xi_1)\sqrt{s}\big]}=$$
$$=2\exp\Big[-(\delta+\xi_1)\sqrt{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\big[-2n(\delta+\xi_1)\sqrt{s}\big]\Big]$$

перепишем формулы (10) в следующем удобном виде для нахождения оригиналов:

$$\overline{\theta}_1(\xi)=\overline{\varphi}_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1-\xi\big)\sqrt{s}\Big]+$$
$$+\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1+\xi\big)\sqrt{s}\Big]\Big\}, \qquad -\delta\le\xi\le 0,$$
$$\overline{\theta}_2(\xi)=\frac{1}{\alpha}\overline{\varphi}_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1+\beta_2\xi\big)\sqrt{s}\Big]+$$
$$+\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1-\beta_2\xi\big)\sqrt{s}\Big]\Big\}, \qquad \xi\ge 0.$$

Как видно из (9) для того, чтобы изображение $\overline{W}(s)$ имело оригинал, этим свойством должно обладать изображение

$$\overline{\phi}_1(s)=\sqrt{s}\exp\big(-\xi_1\sqrt{s}\big)\overline{\varphi}(s), \quad -\delta\le\xi\le 0.$$

Следовательно, не для всякой функции $\varphi_1(\tau)$ существует решение обратной задачи теплопроводности об определении интенсивности источника тепла расположенной между слоем и полупространством. Для этого должно существовать обратное преобразование $\overline{\phi}_1(s)$, которое обозначим через $\phi_1(\tau)$.

Таким образом, подставляя (9) в (10)

$$\overline{\varphi}_1(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\big(\xi_1\sqrt{s}\big)\overline{\phi}_1(s), \quad \xi_1\in(-\delta,0)$$

будем иметь:

$$\overline{W}(s)=\frac{\lambda_2\beta_2+\lambda_1}{a_1c_1}\overline{\phi}_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\big(-2n(\delta+\xi_1)\sqrt{s}\big)+\chi\exp\Big[-2\big((n+1)\delta+n\xi_1\big)\sqrt{s}\Big]\Big\};$$

$$\overline{\theta}_1(\xi)=\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\phi}_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big\{\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)-\xi\big)\sqrt{s}\Big]+\exp\Big[-\big(2n(\delta+\xi_1)+\xi\big)\sqrt{s}\Big]\Big\},$$

$$(-\delta \le \xi \le 0);$$

$$\bar{\theta}_1(\xi) = \frac{1}{a\sqrt{s}}\bar{\phi}_1(s)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\left(2n(\delta+\xi_1)+\beta_2\xi\right)\sqrt{s}\right]+\exp\left[-\left(2n(\delta+\xi_1)-\beta_2\xi\right)\sqrt{s}\right]\right\},$$

$$(\xi \ge 0).$$

Переходя к оригиналам в этих формулах получим

$$W(\tau) = \frac{\lambda_2\beta_2+\lambda_1}{a_1c_1}\int_0^{\tau}\frac{\phi_1(\tau-z)}{z\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{n(\delta+\xi_1)\exp\left(-\frac{n^2(\delta+\xi_1)^2}{z}\right)+\right.$$

$$\left.+\chi[n+1]\delta+n\xi_1]\exp\left[-\frac{(n\delta+n\xi_1+\delta)^2}{z}\right]\right\}dz; \tag{11}$$

$$\theta_1(\xi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{\phi_1(\tau-z)}{\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\frac{\left(2n(\delta+\xi_1)-\xi\right)^2}{4z}\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{\left(2n(\delta+\xi_1)+\xi\right)^2}{4z}\right]\right\}dz, \quad (-\delta \le \xi \le 0); \tag{12}$$

$$\theta_2(\xi,\tau) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{\phi_1(\tau-z)}{\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\frac{\left(2n(\delta+\xi_1)+\beta_2\xi\right)^2}{4z}\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{\left(2n(\delta+\xi_1)-\beta_2\xi\right)^2}{4z}\right]\right\}dz, \quad (\xi \ge 0). \tag{13}$$

Если полоса и полупространство обладают одинаковым термоупругим свойством, тогда учитывая то, что при этом $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_0$, $c_1=c_2=c_0$, $\alpha=1$, $\chi=0$, для интенсивности источника тепла будем иметь формулу:

$$W(\tau) = \frac{\lambda_0(\delta+\xi_1)}{a_0c_0\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{\Phi_1(\tau-z)}{\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\frac{n^2(\delta+\xi_1)^2}{z}\right]dz,$$

а температура будет определяться по формуле (13), где $-\delta \le \xi < \infty$.

Теперь рассмотрим задачу в слое и полупространстве по известной температуре в полупространстве при $\xi=\xi_2$. Предположим, что

$$\theta_2(\xi_2,\tau)=\varphi_2(\tau), \quad \xi_2\in(0,\infty)$$

или в преобразованиях Лапласа

$$\bar{\theta}_2(\xi_2)=\bar{\varphi}_2(s).$$

Отсюда и из первого условия (2) при $k=2$ будем иметь:

$$\overline{W}(s)=\frac{\lambda_1\Delta}{\alpha_2c_1}\frac{\bar{\varphi}_2(s)}{ch\delta\sqrt{s}}\exp\left(\beta_2\xi_2\sqrt{s}\right)$$

или

$$\overline{W}(s)\frac{\sqrt{s}}{\alpha_2c_1}\bar{\varphi}_2(s)\exp\left(\beta_2\xi_2\sqrt{s}\right)\left(\lambda_2\beta_2+\lambda_1 th\sqrt{s}\right). \tag{14}$$

Для существования обратного преобразования (14), изображение

$$\overline{\Phi}_2(s)=\sqrt{s}\overline{\varphi}_2(s)\exp\left(\beta_2\xi_2\sqrt{s}\right), \quad \xi_2\in(0,\infty)$$

должно подчиняться условиям существования оригинала, который обозначим через $\Phi_2(\tau)$. Если эти условия выполняются, тогда изображение $\overline{\varphi}_2(s)$ будет иметь вид:

$$\overline{\varphi}_2(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\Phi}_2(s)\exp\left(-\beta_2\xi_2\sqrt{s}\right).$$

Следовательно, изображение Лапласа интенсивности источника тепла и температур слоя и полупространства соответственно будут:

$$\overline{W}(s)=\frac{\lambda_2\beta_2}{\alpha_2 c_1}\overline{\Phi}_2(s)+\frac{\lambda_1}{\alpha_2 c_1}\overline{\Phi}_2(s)th\delta\sqrt{s},$$

$$\overline{\theta}_1(\xi)=\alpha\frac{ch(\delta+\xi)\sqrt{s}}{\sqrt{s}ch\delta\sqrt{s}}\overline{\Phi}_2(s), \quad (-\delta\le\xi\le 0),$$

$$\overline{\theta}_2(\xi)=\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{\Phi}_2(s)\exp\left(\beta_2\xi\sqrt{s}\right), \quad (\xi\ge 0).$$

Переходя к оригиналам в этих формулах получаем:

$$W(\tau)=\frac{\lambda_2\beta_2+\lambda_1}{\alpha_2 c_1}\Phi_2(\tau)-\frac{4\lambda_1\delta}{\alpha_2 c_1\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\int_0^{\tau}\frac{\Phi_2(\tau-z)}{z\sqrt{z}}\exp\left(-\frac{n^2\delta^2}{z}\right)dz,$$

$$\theta_1(\xi,\tau)=\frac{\alpha}{\sqrt{\tau}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\tau}\frac{\Phi_2(\tau-z)}{\sqrt{z}}\left\{\exp\left[-\frac{(2n\delta-\xi)^2}{4z}\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{\left(2(n+1)\delta+\xi\right)^2}{4z}\right]\right\}dz, \qquad (-\delta\le\xi\le 0);$$

$$\theta_2(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{\Phi_2(\tau-z)}{\sqrt{z}}\exp\left(-\frac{\beta_2^2\xi^2}{4z}\right)dz, \quad (\xi\ge 0).$$

Пример. Предположим, что температура слоя при $x=x_1^{\sigma}$, $x_1\in(-h,0)$ известна и задана в виде:

$$T_1(x_1,t)=\varphi_{01}(t)=\frac{q_1}{\pi\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{4t}\right),$$

где q_1 и ε - заданные положительные числа. Пример, что $T_0=0$ и удовлетворяется условие

$$\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\ge-\xi_1.$$

Тогда будем иметь:

$$\varphi_1(\tau)=\frac{a_1c_1q_1}{\sqrt{\pi a_1\tau}}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2c_1^2}{4\tau}\right), \qquad \overline{\varphi}_1(s)=\frac{a_1c_1q_1}{\sqrt{\pi a_1}}\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\varepsilon c_1\sqrt{\frac{s}{a_1}}\right),$$

$$\overline{\Phi}_1(s)=\frac{a_1c_1q_1}{\sqrt{a_1}}\exp\left[-\left(\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}+\xi_1\right)\sqrt{s}\right], \quad \Phi_1(\tau)=\frac{a_1c_1q_1}{\sqrt{\pi a_1\tau}}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left(\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}+\xi_1\right)^2\right].$$

Подставляя значение $\Phi_1(\tau)$ в формулы (11)-(13) определяем:

$$W(\tau)=\frac{q_1(\lambda_2\beta_2+\lambda_1)}{\tau\sqrt{\pi a_1\tau}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left[2n(\delta+\xi_1)+\xi_1+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right]\times\right.$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right)^2\right]+\chi\left[(2n+1)(\delta+\xi_1)+\delta+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right]\times$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left((2n+1)(\delta+\xi_1)+\delta+\frac{\varepsilon c_1}{4\tau}\right)^2\right]\right\},$$

$$\theta_1(\xi,\tau)=\frac{a_1c_1q_1}{\sqrt{\pi a_1\tau}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1-\xi+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left(2n(\delta+\xi_1)+\xi_1+\xi+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right)^2\right]\right\},$$

$$\theta_2(\xi,\tau)=\frac{a_2c_1q_1}{\sqrt{\pi a_1\tau}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left(2n(\delta+\xi_1)+\beta_2\xi+\xi_1+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\left(2n(\delta+\xi_1)-\beta_2\xi+\xi_1+\frac{\varepsilon c_1}{\sqrt{a_1}}\right)^2\left(\frac{1}{4\tau}\right)\right]\right\}.$$

Параметрами q_1 и ε можно распорядиться следующим образом. Приравнивая первую производную по t функции $T_1(x_1,t)$ в нуль, увидем что при

$$t=\frac{\varepsilon^2}{4}$$

она принимает максимальное значение и

$$\max_t T_1(x_1,t)=T_1\left(x_1,\frac{\varepsilon^2}{4}\right)=\frac{2q_1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-1}.$$

Если потребовать, чтобы температура в плоскости $x=x_1$ достигала максимального значения в фиксированной момент времени, то этим определяется q_1 и ε. Действительно, предположим что $\max T_1(x_1,5\,сек)=120$ гр. Тогда определяем $\varepsilon^2=20\,сек$, $q_1=1292{,}8$. Следовательно, в этом случае

$$T_1(x_1,t)=\frac{1292{,}8}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{5}{t}}.$$

На рис. 1,2 приведены графики изменения $AW(\tau)$, $A_1\theta_1$, $A_2\theta_2$, где

$$A=\frac{\sqrt{a_1}}{q_1(\lambda_2\beta_2+\lambda_1)},\quad A_1=\frac{\sqrt{a_1\pi}}{a_1c_1q_1},\quad A_2=\frac{\sqrt{a_1\pi}}{a_2c_1q_1}.$$

2. Теперь рассмотрим обратную задачу об определении интенсивности источника тепла между двумя полупространствами отдельных плоскостей $x=0$ и обладающих разными характеристиками.

Трансформанты Лапласа по τ температур и напряжений в этих полупространствах будут:

$$\overline{\theta}_1(\xi)=\alpha_1 q\frac{\overline{W}}{\sqrt{s}}\exp\left(\xi\sqrt{s}\right),\quad \xi\le 0,$$

$$\overline{\theta}_2(\xi)=\alpha_2 q\frac{W}{\sqrt{s}}\exp\left(-\beta_2\xi\sqrt{s}\right),\quad \xi\ge 0,$$

$$\overline{\sigma}_1(\xi)=\frac{q\overline{w}}{m\gamma_2+\nu}\left[m\gamma^2\left(\frac{\alpha_1}{s-1}+\frac{\nu\alpha_2\beta_2}{s\gamma_2^2-\beta_2^2}\right)+\nu\left(\frac{\alpha_1\sqrt{s}}{s-1}\right)\right]\times$$

$$\times\exp(\xi s)-\frac{\alpha_1 q\sqrt{s}}{s-1}\overline{W}\exp\left(\xi\sqrt{s}\right),\quad \xi\le 0,$$

$$\overline{\sigma}_2(\xi)=\frac{\gamma_2 q\overline{w}}{m\gamma_2+\nu}\left(\frac{\nu\alpha_2\beta_2}{s\gamma_2^2-\beta_2}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{s}+1}+\frac{m\alpha_2^2\gamma_2\sqrt{s}}{s\gamma_2^2-\beta_2}\right)\exp(-\gamma_2\xi s)-$$

$$-\frac{\alpha_2\gamma_2 q\overline{W}\sqrt{s}}{s\gamma_2^2-\beta_2^2}\exp\left(-\beta_2\xi\sqrt{s}\right),\quad \xi\ge 0,\quad q=\frac{c_1}{\lambda_2\beta_2+\lambda_1}. \qquad (15)$$

Дополнительное условие для напряжения зададим в виде

$$\sigma_1(\xi_1,\tau)=\psi_1(\tau), \qquad (16)$$

где $\xi_1\in(-\infty,0)$ условие (16) в преобразованиях Лапласа будет иметь вид:

$$\overline{\sigma}_1(\xi_1)=\overline{\psi}(s).$$

Как видно из выражения $\overline{\sigma}_1(\xi)$, оригинал этого изображения при $\tau<-\xi$, существует только тогда, когда изображение

$$\overline{\psi}_1(s)=\frac{\alpha_1 q\overline{W}}{s-1}\sqrt{s}\exp\left(\xi_1,\sqrt{s}\right)$$

имеет оригинал. Отсюда определяем

$$\overline{W}(s)=-\frac{s-1}{a_1 q}\frac{1}{\sqrt{s}}\psi_1(s)\exp\left(-\xi_1,\sqrt{s}\right).$$

Таким образом, для определения интенсивности источника тепла необходимо, чтобы изображения

$$f_1(s)=\frac{s-1}{\sqrt{s}}\overline{\psi}_1(s)\exp\left(-\xi_1,\sqrt{s}\right)$$

имело оригинал, который обозначим через $f_1(\tau)$. Тогда будем иметь:

$$W(\tau)=-\frac{1}{a_1 q}f_1(\tau),$$

$$\theta_1(\xi,\tau)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\frac{1}{\sqrt{z}}f_1(\tau-z)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4z}\right)dz,\quad \xi\le 0,$$

$$\theta_2(\xi,\tau)=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\frac{1}{\sqrt{z}}f_1(\tau-z)\exp\left(-\frac{\xi^2}{4z}\right)dz,\quad \xi\ge 0,$$

$$\sigma_1(\xi,\tau)=\sigma_{11}+\begin{cases}0, & \tau<-\xi\\ \sigma_{12}, & \tau>-\xi\end{cases}\qquad \sigma_2(\xi,\tau)=\sigma_{21}+\begin{cases}0, & \tau<\gamma_2\xi\\ \sigma_{22}, & \tau>\gamma_2\xi\end{cases}$$

$$\sigma_{11} = \int_0^{\tau} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4z}\right) + \frac{\exp(z)}{2}\left[\exp(-\xi)\phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{z}} - \sqrt{z}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp(\xi)\phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)\right]\right\} f_1(\tau - z)dz\,,$$

$$\sigma_{12}(\xi,\tau) = -\frac{1}{\alpha_1(m\gamma_2 + \nu)}\left\{\frac{\nu(\alpha_1 - m\alpha_2)}{\sqrt{\pi z}} + m\gamma_2\left[\alpha_1 \exp(z) + \frac{\nu\alpha_2\beta_2}{\gamma_2^2}\exp\left(-\frac{\beta_2^2 z}{\gamma_2^2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \nu\left[\alpha_1\phi(z) - \frac{m\alpha_2\beta_2}{\gamma_2}\phi\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2}\sqrt{z}\right)\right]\right\} f_1(\tau - z)dz\,,$$

$$\sigma_{12} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\int_0^{\gamma_2\xi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\exp\left(-\frac{\beta_2^2\xi^2}{4z}\right) + \frac{\beta_2}{2\gamma_2}\exp\left(-\frac{\beta_2^2}{\gamma_2^2}\right)\left[\exp\left(-\frac{\beta_2^2\xi}{\gamma_2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\phi^*\left(\frac{\beta_2\xi}{2\sqrt{z}} - \frac{\beta_2}{\gamma_2}\sqrt{z}\right) - \exp\left(\frac{\beta_2^2}{\gamma_2}\xi\right)\phi^*\left(\frac{\beta_2\xi}{2\sqrt{z}} + \frac{\beta_2}{\gamma_2}\sqrt{z}\right)\right]\right\} f_1(\tau - z)dz\,,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{\gamma_2}{\alpha_1(m\gamma_2 + \nu)}\int_{\gamma_2\xi}^{\tau}\left\{\frac{\nu\alpha_2\beta_2}{\gamma_2^2}\exp\left(-\frac{\beta_2^2 z}{\gamma_2^2}\right) - \frac{\alpha_1 - m\alpha_2}{\sqrt{\pi z}} + \alpha_1\phi^*\left(\sqrt{z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m\alpha_2\beta_2}{\gamma_2}\phi\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2}\sqrt{z}\right)\right\} f_1(\tau - z)dz\,,$$

здесь $\phi(z) = erf(z)$, $\phi^*(z) = 1 - erf(z)$.

Если температурное напряжение будет задаваться во втором полупространстве, то аналогичным образом определяется $W(\tau)$ и в этом случае.

Литература

[1]. Бахышев Ш.М. *Тепловые волны от источника, действующего между слоем и полупространством.* Прикладная механика, т.10, вып.8, с.75-82.

[2]. Вигак В. *Управления температурными напряжениями и перемещениями.* Наукова думка. К., 1988.

[3]. Диткин В.А., Прудников А.П. *справочник по операционному исчилению.* М., ВШ., 1965.