1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.984

АСЛАНОВА Н.М.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство. В гильбертовом пространстве $H_1 = L_2((0;1),H)$ рассмотрим следующие два дифференциальных оператора L_0 и L, порожденные, соответственно, выражениями

$$l_0[y] = -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + Ay,$$

$$l[y] = -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + Ay + Q(x)y, \quad \nu \geq \frac{1}{2}$$

и краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + hy(1) = 0.$$

А самосопряженный, полуограниченный оператор u является обратным для вполне непрерывного оператора в H.

Предположим, что операторная функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $Q(x)$ имеем вторую слабую произвольную на отрезке $[0,1]$ и $\forall x \in [0,1]$, $Q^{(l)}(x) \in \sigma_1$, $\left[Q^{(l)}(x)\right]^* = Q^{(l)}(x)$;
2) функция $\left\|Q^{(l)}(x)\right\|_1$ $(l = 0,1,2)$ ограничены на отрезке $[0,1]$;
3) $\int_0^1 (Q(x)f, f)dx = 0, \quad \forall f \in H$;+
4) существует такой оператор $C = C^* \in \sigma_1$, что в окрестности нуля выполняется неравенство
$$\left|\left(Q^{(l)}(x)f, f\right)_H\right| \leq |(Cf, f)|, \quad \forall f \in H \quad (l = 0,1,2).$$

Оператор L_0 имеет дискретный спектр.

Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$ собственные значения, а $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ соответствующие ортонормированные собственные вектор- функции этого оператора. Каждое собственное значение выписывается столько раз, какова его кратность.

Поскольку $Q(x)$ ограниченный оператор в пространстве H_1, то оператор L также будет иметь дискретный спектр. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$- собственные значения оператора L. Обозначим через $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \ldots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ собственные значения и ортонормированные собственные элементы оператора A в H, соответственно.

Из краевых условий находим, что собственные значения μ_n - оператора L_0 имеют вид

$$\eta_k^2 + \gamma_i\,, \quad k = 1,2,\ldots, i = 1,2,\ldots,$$

где η_k являются положительными корнями уравнения

$$zJ_\nu'(z) + \left(h + \frac{1}{2}\right)J_\nu(z) = 0\,. \tag{1}$$

Когда $h + \frac{1}{2} + \nu < 0$ уравнение (1) имеет корни вида $\eta_0 = \pm i\lambda_0$, где λ_0 действительное число (см. [3]). Соответственно этому корню у оператора L_0 появляются собственные значения вида $-\lambda_0^2 + \gamma_i$.

Собственные вектор- функции оператора L_0 имеют вид

$$\sqrt{2x}\,\frac{J_\nu(\eta_k x)\eta_k}{J_\nu(\eta_k)\sqrt{\eta_k^2 - \nu^2 + H^2}}\varphi_i\,, \quad k = 0,1,\ldots, i = 1,2,\ldots,$$

где $H = h + \frac{1}{2}$.

Обозначим

$$\mu^{(i)} = \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} \mu_k\,, \quad \lambda^{(i)} = \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} \lambda_k\,,$$

где $n_1 < n_2 < \ldots$ некоторая подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая утверждению леммы 3.2.1 из [2] $(n_0 = 0)$. Согласно [1] сумму

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\lambda^{(i)} - \mu^{(i)}\right)$$

называем регуляризованным следом абстрактного оператора L. Нашей целью является получение формулы для этой суммы. Отметим, что регуляризованный след оператора L в случае, когда $h + \frac{1}{2} + \nu \geq 0$ был исследован в работе [4].

Тем же методом, что и в работе [2] можно доказать, что если $\gamma_i \sim a \cdot i^\alpha$ при $i \to \infty$ $(0 < a < \infty, \alpha > 2)$, то

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda^{(i)} - \mu^{(i)}\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\left(Q\psi_n, \psi_n\right)_{H_1} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\int_0^1 \left(Q(x)\varphi_{i_n}, \varphi_{i_n}\right) 2x \frac{J_\nu^2(\eta_{kn}x)\eta_{kn}^2}{J_\nu^2(\eta_{kn})\left(\eta_{kn}^2 - \nu^2 + H^2\right)}\,. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть при* $i \to \infty$ $\gamma_i \sim a \cdot i^\alpha$ $(0 < a < \infty, \alpha > 2)$. *Если операторная функция* $Q(x)$ *удовлетворяет условиям 1)-4), то имеет место следующая формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda^{(i)} - \mu^{(i)}\right) = \frac{(-2\nu + 4)SpQ(0) + SpQ(1)}{4}$$

Легко доказать (метод аналогичен использованному в [4]), что ряд стоящий справа в (2) абсолютно сходится. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda^{(i)}-\mu^{(i)}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1 2x\frac{J_\nu^2(\eta_m x)\eta_m^2}{J_\nu^2(\eta_m)\left(\eta_m^2-\nu^2+H^2\right)}. \qquad (3)$$

Обозначим

$$S_N(x)=\sum_{m=0}^{N}\frac{2xJ_\nu^2(\eta_m x)\eta_m^2}{J_\nu^2(\eta_m)\left(\eta_m^2-\nu^2+H^2\right)},$$

где $H=h+\dfrac{1}{2}$.

Для вычисления ряда (3) при $N\to\infty$ исследуем асимптотическое поведение $S_N(x)$, где $\eta_N^{-1+\varepsilon}<x<1$. Выразим m-й член суммы $S_N(x)$ в виде вычета в точке η_m некоторой функции от z, имеющей полюсы в точках $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N$. За такую функцию берем

$$\frac{2xzJ_\nu^2(xz)}{J_\nu(z)\left\{zJ_\nu'(z)+HJ_\nu(z)\right\}}. \qquad (4)$$

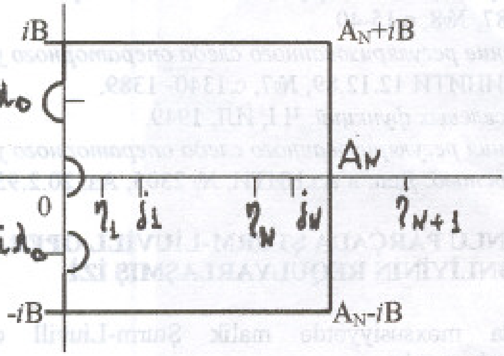
При $h+\dfrac{1}{2}+\nu<0$, функция (4) имеет вычета в точках $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N$ и $j_0,j_1,\ldots,j_N$ (j_n - n-й положительный корень уравнения $J_\nu(z)=0$) (см. [3]).

Вычеты в $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_N$ и $j_0,j_1,\ldots,j_N$ равны, соответственно,

$$\frac{2xJ_\nu^2(\eta_m x)\eta_m^2}{J_\nu^2(\eta_m)\left(\eta_m^2-\nu^2+H^2\right)},\quad \frac{2xJ_\nu^2(j_n x)}{J_{\nu+1}^2(j_n)}.$$

Рассматриваем прямоугольник с вершинами в точках $\pm iB$, $A_N\pm iB$, где $A_N=\pi N+\dfrac{1}{2}\nu\pi$. A_N выбирается таким, чтобы $\eta_N<A_N<\eta_{N+1}$, $j_N<A_N<j_{N+1}$.

Отметим, что точки 0 и $-i\lambda_0$ не включаются в этот контур, так как 0 не является собственным значением для L_0, а собственный вектор соответствующий $-i\lambda_0$ отличается от собственного вектора соответствующего $i\lambda_0$ лишь знаком.



Если $z=u+i\vartheta$, то при большом ϑ и при $u\geq 0$ (4) будет иметь порядок $O\left|e^{|\vartheta|(2x-2)}\right|$. Учитывая это, а также поведение бесселевой функции в нуле, и то, что функция (4) нечетная из теории вычетов Коши получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{2xzJ_\nu^2(xz)\,dz}{J_\nu(z)\left\{zJ_\nu'(z)+HJ_\nu(z)\right\}}=T_N(x)-S_N(x),$$

где $T_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{2xJ_\nu^2(j_n x)}{J_\nu^2(j_n)}$.

При $\eta_n^{-1+\varepsilon}<x<1$, $|xz|\to\infty$, когда $z\to\infty$, поэтому в подынтегральном выражении можно использовать асимптотику бесселевых функций при больших значениях аргумента. Тогда при $N\to\infty$ находим

$$T_N(x)-S_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sin(2xA_N-\nu\pi)}{2\cos\frac{\pi x}{2}}+\psi(A_N x),\quad \psi(A_N x)\to 0,\, N\to\infty.$$

Пользуясь неравенствами

$$\left|\frac{J_\nu(xz)}{J_\nu(z)}\right|<\frac{k}{\sqrt{x}}e^{-|1-x||J(z)|},\quad \left|\sqrt{x}J_\nu(x)\right|<const$$

(см. [3]) для любого x можно доказать

$$\left|T_N(x)-S_N(x)\right|\le N\cdot const.$$

Пользуясь этим неравенством, а также равенством (5) получим

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f_i(x)\int_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{2xzJ_\nu^2(xz)dz}{J_\nu(z)\{zJ_\nu'(z)+HJ_\nu(z)\}}dx=\left(-\frac{1}{2}f_i(1)-f_i(0)\right).$$

Имея ввиду теорему 3.2.2 из [2] получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 S_N(x)f_i(x)dx=-\frac{(2\nu-4)f_i(0)-f_i(1)}{4}$$

Таким образом, суммируя последнее по всем i получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\left(Q(x)\varphi_i,\varphi_i\right)2x\frac{J_\nu''(\eta_k x)\eta_k''}{J_\nu'(\eta_k x)\left(\eta_k'-\nu'+H'\right)}dx=\frac{(-2\nu+4)SpQ(0)+SpQ(1)}{4}.$$

Литература

[1]. Байрамоглы М. *О регуляризованном следе дифференциального оператора n-го порядкас неограниченным операторным коэффициентом* // Спектральная теория и ее приложения. Баку: Элм, 1987, №8, с.15-40.

[2]. Гашимов И.Ф. *Вычисление регуляризованного следа операторного уравнения Штурма- Лиувилля.* Деп. В ВИНИТИ 12.12.89, №7, с.1340- 1389.

[3]. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций.* Ч.I, ИЛ, 1949.

[4]. Асланова Н.М. *Вычисления регуляризованного следа операторного уравнения Штурма- Лиувилля с особенностью.* Деп. в Аз.НИТИ, № 2305, Аз. 20.2.95, 29с.

Aslanova N.M.

SONLU PARÇADA ŞTURM-LİUVİLL OPERATOR TƏNLİYİNİN REQULYARLAŞMIŞ İZİ

İşdə sonlu parçada məxsusiyyətdə malik Şturm-Liuvill operator tənliyinin requlyarlaşmış izi üçün düstur alınmışdır.

Aslanova N.M.

REGULARIZATED TRACE FOR SINGULAR OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Here the formula for regulated trace of Shturm-Liuvill operator equation is obtained.