УДК 539.3

КАСУМОВ А.К.

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ СЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.Сетчатые конструкции типа пластин и оболочек находят широкое применение в технике, в частности, в строительстве, являясь одной из основных моделей поведения арматуры тонкостенных железобетонных конструкций. Кроме того, сетчатые конструкции являются дискретной моделью "цельных" тонкостенных конструкций при применении к расчету последних методов конечных элементов (МКЭ). Отметим, что нестандартные тонкостенные конструкции, находящие применение в современных технологиях, обычно рассчитываются МКЭ. Рассматриваемые сетчатые конструкции можно представить в виде пары семейств криволинейных стержней, пересекающихся между собой. В частности, пластину можно представить в виде пересекающихся прямолинейных стержней [4], цилиндрическую панель- в виде пересечения прямолинейных стержней и круговых колец [3]. При таком подходе сетчатые конструкции являются частным случаем стержневых конструкций. Такое представление позволило разработать ряд методов расчета этих конструкций [1], в частности, к расчету сетчатых конструкций применяется МКЭ.

Отметим, что при применении МКЭ конструкция разбивается на конечные элементы (КЭ). Перемещение точек КЭ аппроксимируется некоторыми функциями, с помощью которых строится матрица жесткости. Точность полученного решения уточняется за счет изменения разбиения, что увеличивает затраты машинного времени. При этом разбиение зависит от расположения узлов самой конструкции. В данной работе приводится модификация МКЭ, где за КЭ берется элемент конструкции, расположенный между ее узлами. Суть модификации заключается в следующем: матрица жесткости КЭ строится, основываясь на точное решение уравнений равновесия упругого прямолинейного стержня и кругового кольца, полученных в рамках теории С.П. Тимошенко для криволинейного стержня [3]. Данная модификация уменьшает затраты машинного времени, т.к. при ее применении нет необходимости уточнения счета. Использование модели С.П. Тимошенко позволяет рассматривать короткие КЭ.

2. Предположим, что КЭ сетчатой конструкции является тонкий упругий криволинейный пространственный стержень [1]. Для работы КЭ применим модель С.П. Тимошенко. Тогда деформация произвольной точки КЭ в локальной системе координат определяется из следующих соотношений [2]:

$$e_{ss} = e_{ss0} + z\chi_y + y\chi_z = \frac{du}{ds} - k_1 w + z\left(-\frac{d\psi_y}{ds}\right) + y\left(k_1\psi_s + \frac{d\psi_z}{ds}\right),$$

$$e_{sy} = e_y + ze_k = \frac{1}{2}\left(\psi_z - k_2 w + \frac{dw}{ds} + z\frac{d\psi_s}{ds}\right),$$

$$e_{sz} = e_z - ye_k = \frac{1}{2}\left(k_1 u + \frac{d\mathrm{v}}{ds} + k_2\mathrm{v} - \psi_y - y\frac{d\psi_s}{ds}\right),$$

$e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = 0$, (1)

где s - элемент дуги оси стержня, (y,z) - координаты точки поперечного сечения, $\{u,v,w\}$ - перемещение точек оси, $\{\psi_s,\psi_y,\psi_z\}$ - вектор поворота поперечного сечения, (k_1,k_2) - кривизна и кручение оси. Отметим, что выбор модели объясняется тем, что эта модель является наиболее общей среди моделей, описывающих поведение тонких стержней. В рамках принятой модели вводятся: усилия N, моменты M_y, M_z, M и перерезывающие усилия Q_z, Q_y следующим образом:

$$N = \int_F \sigma_{ss} dF; \quad M_z = \int_F \sigma_{ss} y dF; \quad M_y = -\int_F \sigma_{ss} z dF;$$
$$Q_y = \int_F \sigma_{sy} dF; \quad Q_z = \int_F \sigma_{sz} dF; \quad M = \int_F (\sigma_{sy} z - \sigma_{sz} y) dF, \tag{2}$$

где F - площадь поперечного сечения; $\sigma_{ss}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$ - напряжения в точках поперечного сечения.

Как было показано в [2], зная значения введенных величин, можно определить значения напряжений с точностью до линейного разложения по координатам (y,z). Определим физические соотношения. Считая КЭ упругим и изотропным, можно принять, что:

$$\sigma_{ss} = Ee_{ss}; \quad \sigma_{sy} = Ee_{sy}; \quad \sigma_{sz} = Ee_{sz},$$

где E - модуль Юнга ($\nu \approx 0$). Так как элементы сетчатой конструкции, в основном, являются стандартными элементами, то поперечные сечения являются симметричными. Тогда, используя соотношения (2), имеем:

$$N = EFe_{ss}; \quad M_y = -EJ_y \chi_y; \quad M_z = EJ_z \chi_z; \tag{3}$$
$$M = EJ_\rho e_k; \quad Q_y = EFe_y; \quad Q_z = EFe_z,$$

где J_y, J_y, J_ρ - моменты инерции поперечного сечения. В рамках соотношений (1) уравнения равновесия имеют вид:

$$-\frac{dN}{ds} + k_1 Q_z = 0; \quad k_\alpha Q_z - \frac{dQ_y}{ds} = 0; \quad Nk_1 + Q_y k_2 + \frac{dQ_z}{ds} = 0;$$
$$-\frac{dM}{ds} + M_z k_1 = 0; \quad \frac{dM_y}{ds} + Q_z = 0; \quad -\frac{dM_z}{ds} + Q_y = 0. \tag{4}$$

Согласно МКЭ необходимо знать напряженно-деформированное состояние в зависимости от значения узловых перемещений, т.е. уравнение (4) совместно с уравнениями (1)-(3) необходимо решать при следующих граничных условиях:

при $S = S_i$
$$u = u_i; \quad v = v_i; \quad w = w_i; \quad \psi_s = \psi_{si}; \quad \psi_y = \psi_{yi};$$
$$\psi_z = \psi_{zi}; \quad i = 0,1, \tag{5}$$

где S_i -координаты торцов КЭ, $\left\{\overset{\circ}{u}\right\} = \{u_1, v_1, w_1, \psi_{s1}, \psi_{y1}; \psi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \psi_{s2}; \psi_{y2}; \psi_{z2}\}^T$ - вектор перемещения узлов [5]. Из (4) следует, что аналитическое решение этой системы можно получить при $(k_i = 0)$ и для плоского кругового кольца $(k_1 = R^{-1}, k_2 = 0)$. Именно для этих случаев модифицируется МКЭ [2]. Отметим, что построения, приведенные в [1] относятся к пологим сетчатым оболочкам, т.е. когда $k_2 = 0$; $k_1 = A - const$. Если криволинейный стержень можно представить в виде сопряжения нескольких прямолинейных стержней с несколькими пологими стержнями (дугами круговых стержней), то к расчету сетчатых конструкций, состоящих из таких криволинейных стержней, так же можно применять рассматриваемую модификацию МКЭ.

На примере прямолинейного стержня покажем последовательность применения модификации МКЭ [2]. Уравнения (4) с учетом (1)-(3) примут вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0;\quad \frac{d}{dx}\left(\psi_z + \frac{dv}{dx}\right) = 0;\quad \frac{d}{dx}\left(-\psi_y + \frac{dw}{dx}\right) = 0;\quad \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} = 0,$$

$$F\frac{1}{2}\left(-\psi_y + \frac{dw}{dx}\right) = -J_y \frac{d^2 \psi_y}{dx^2};\quad F\frac{1}{2}\left(-\psi_z + \frac{dv}{dx}\right) = J_z \frac{d^2 \psi_z}{dx^2}; \tag{6}$$

где $x = s$. Данная система уравнений решается при условиях (5), где принимается $s_0 = 0; s_1 = L; L$ - длина КЭ. Полученная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение системы уравнений (6) представим в векторном виде. Для этого введем следующие вектора:

$$\{U\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T;\quad \{U\} = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y, \psi_z\}^T,$$

где $\{U\}$ - вектор перемещения произвольной точки КЭ. Для модели С.П. Тимошенко имеет место следующее представление:

$$\{U\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \{U\}.$$

С другой стороны, решение системы (6) можно представить следующим образом:

$$\{U\} = [N]\{U^0\}, \tag{7}$$

где $[N]$ - матрица нормы размерности 6×12 имеет следующие компоненты:

$N_{11} = 1 - \zeta$; $N_{12} = \ldots = N_{16} = 0$; $N_{17} = \zeta$; $N_{18} = N_{1\,12} = 0$; $N_{21} = 0$;

$N_{22} = -\zeta\alpha_z\beta_z - \frac{1}{4}\zeta^2\beta_z + 1$; $N_{23} = N_{24} = N_{25} = 0$; $N_{26} = L\zeta\alpha_z\beta_z\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\zeta^2\beta_z \times$

$\times\left(\frac{1}{3} + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2}\right) - L\zeta$; $N_{27} = 0$; $N_{28} = 1 - N_{22}$; $N_{29} = N_{2\,10} = M_{2\,11} = 0$;

$N_{2\,12} = L\zeta\cdot\alpha_z\cdot\beta_z\frac{1}{2} - \frac{1}{2}L\zeta^2\beta_z\left(-\frac{1}{6} + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2}\right)$; $N_{31} = N_{32} = 0$;

$N_{33} = -\zeta\alpha_z\beta_z - \frac{1}{4}\zeta^2\beta_z + 1$; $N_{34} = 0$; $N_{35} = -\frac{1}{2}L\zeta\alpha_y\beta_y - \frac{1}{2}L\zeta^2\beta_y \times$

$\times\left(\frac{1}{3} + 2\frac{J_y}{F}\frac{1}{L^2}\right) + L\zeta$; $N_{36} = N_{37} = N_{38} = 0$; $N_{39} = 1 - N_{33}$; $N_{3\,10} = 0$;

$N_{3\,11} = -L\zeta\cdot\alpha_y\cdot\beta_y\frac{1}{2} + \frac{1}{2}L\zeta^2\beta_y\left(-\frac{1}{6} + 2\frac{J_y}{F}\frac{1}{L^2}\right)$; $N_{3\,12} = 0$; $N_{41} = N_{42} = N_{43} = 0$;

$N_{44} = 1 - \zeta$; $N_{45} = \ldots = N_{49} = 0$; $N_{4\,10} = \zeta$; $N_{4\,11} = N_{4\,12} = 0$; $N_{51} = N_{52} = 0$;

$$N_{53} = \frac{1}{2L}\zeta\beta_y(\zeta - 1);\ N_{54} = 0;\ N_{55} = \frac{1}{4}\zeta^2\beta_y - \zeta\beta_y\left(\frac{1}{3} + 2\frac{J_y}{F}\frac{1}{L^2}\right) + 1;$$

$$N_{56} = N_{57} = N_{58} = 0;\ N_{59} = -N_{53};\ N_{510} = 0;\ N_{511} = \frac{1}{4}\zeta^2\beta_y + \zeta\beta_y\left(-\frac{1}{6} + 2\frac{J_y}{F}\frac{1}{L^2}\right);$$

$$N_{512} = 0;\ N_{61} = 0;\ N_{62} = -\frac{1}{22}\zeta^2\beta_z + \zeta\cdot\frac{1}{22}\beta_z;\ N_{63} = N_{64} = N_{65} = 0;$$

$$N_{66} = \frac{1}{4}\zeta^2\beta_z - \zeta\beta_z\left(\frac{1}{3} + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2}\right) + 1;\ N_{67} = 0;\ N_{68} = -N_{62};\ N_{69} = 0;$$

$$N_{610} = N_{611} = 0;\ N_{612} = \frac{1}{4}\zeta^2\beta_z + \zeta\beta_z\left(-\frac{1}{6} + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2}\right);\ \zeta = \frac{x}{L};$$

$$\alpha_z = -\frac{1}{6}\zeta^2 + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2};\ \beta_z = \left(\frac{1}{12} + 2\frac{J_z}{F}\frac{1}{L^2}\right)^{-1};\ (z \leftrightarrow y). \tag{8}$$

В отличии от классического МКЭ [5] в приведенной модификации элементы нормы определены аналитически, что составляет суть модификации МКЭ, предложенного в [3]. Соотношения (8) позволяют аналитически определить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке КЭ. Матрицу нормы можно построить так же и для элемента, представляющего собой дугу кругового кольца, при этом, по аналогии с (8), элементы этой матрицы будут определены аналитическими выражениями.

Зная матрицу нормы, для любого КЭ по известным процедурам МКЭ можно вычислить $\{U^0\}$ любой узловой точки, рассматриваемой конструкции в глобальной системе координат [5]. Особенностью полученной матрицы жесткости всей конструкции является то, что ее элементы вычисляются аналитически. При традиционном применении МКЭ, после определения $\{U^0\}$ всей конструкции, необходимо провести уточнение полученного решения. Так как, оно проводится введением дополнительных точек разбиения, то всю процедуру расчета необходимо провести заново. Очевидно, что именно эта часть расчета конструкции (уточнение счета) требует больших затрат машинного времени. В предложенной модификации не требуется уточнение счета, т.к. полученные решения точны в рамках точности модели С.П. Тимошенко. Зная $\{U^0\}$, с помощью аналитических функций можно определить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке конструкции.

Использование аналитического решения дает ряд преимуществ предложенной модификации по сравнению с традиционными МКЭ. Например, в точке приложения сосредоточенной силы (если она изначально не является узловой точкой) нет необходимости ставить точку разбиения. Приведенные отличия позволяют сократить число разбиений конструкций, что приводит к уменьшению затрат машинного времени. Отличие приведенной модификации от других методов расчета сетчатых конструкций в том, что используется более точная модель расчета, а именно, модель учитывающая кручение и сдвиги. Введение дополнительных предложений типа гипотезы нормальных сечений и т.д. суживает класс рассматриваемых конструкций. Проведение модификации на основе МКЭ позволяет использовать обширное программное обеспечение этого метода.

Литература

[1]. Пшеничков Г.Н. *Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок.* М.: Наука, 1982, 352с.

[2]. Касумов А.К. *Модификация метода конечных элементов для расчета стержневых конструкций.* Баку, Изд-во "Азербайджан", 1996, 152с.

[3]. Касумов А.К. *О модификации метода конечных элементов к расчету многослойных сетчатых оболочек.* Труды XVIII Международной конференции по теории оболочек и пластин, Саратов, Изд-во СГТУ, 1997, т.3, с. 88-91.

[4]. Касумов А.К. *О применении метода конечных элементов к расчету сетчатых пластин.* Труды Международной конференции "Актуальные проблемы механики оболочек", Казань, Мат. об-во, УНИПРЕСС, 1998, с. 110.

[5]. Занкевич О.К. *Метод конечных элементов в механике.* М.: "Мир", 1975, 541с.